Chapitre 13 : Fonctions : limite d'une fonction et continuité en un point

1 Etude locale d'une fonction

1.1 Propriété vraie au voisinage de a

Définition 1 (Voisinage d'un point).

*Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. On appelle **voisinage** de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme :*

1. *si $a \in \mathbb{R}$, $]a-\eta, a+\eta[$ avec $\eta > 0$,*
2. *si $a = +\infty$, $]\eta, +\infty[$ avec $\eta > 0$,*
3. *si $a = -\infty$, $]-\infty, \eta[$ avec $\eta < 0$.*

$]a-\eta, a+\eta[$ est appelé intervalle ouvert de centre a et de rayon η.
Les voisinages de $a \in \mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui contiennent un intervalle ouvert de centre a. Un intervalle ouvert de centre a est donc lui aussi un voisinage de a.
Par ailleurs pour $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$, $x \in]a-\eta, a+\eta[$ ssi $|x-a| < \eta$.
► Exemple : $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont contenus par tout voisinage de a à partir d'un certain rang.

Définition 2 (Propriété vraie au voisinage de a).

*On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur E est **vraie au voisinage de** a s'il existe un voisinage de a tel que la propriété est vraie sur l'intersection de E avec ce voisinage de a.*

Définition 3 (Fonction définie au voisinage de a).

*Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f est **définie au voisinage de** a lorsque*

- *si $a \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\setminus \{a\} \subset E$ (il existe un voisinage V de a tel que $V \setminus \{a\} \subset E$)*
- *si $a = +\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset E$*
- *si $a = -\infty$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset E$*

Remarque 1. *Si $a \in \mathbb{R}$, f est définie au voisinage de a à gauche si $\exists \eta > 0$ tel que $]a-\eta, a[\subset E$ et f est définie au voisinage de a à droite si $\exists \eta > 0$ tel que $]a, a+\eta[\subset E$.*
Si $a \in \mathbb{R}$, f est définie au voisinage de a implique que f est définie au voisinage de a à droite et à gauche.
Ne pas confondre 'f est définie au voisinage de a' et 'f est définie sur un voisinage de a' qui veut dire qu'il existe un voisinage V de a tel que $V \subset E$ (c'est-à-dire E est un voisinage de a). La seconde affirmation implique la première mais la réciproque est fausse.

► Exemple : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de 0. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie au voisinage de $+\infty$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x-5}$ est définie au voisinage de $\pm\infty$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas au voisinage de 0 car il n'existe pas d'intervalle ouvert centré en 0 tel que $I \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.

1.2 Limites finies

On va étendre dans ce qui suit la notion de limite d'une suite réelle introduite au chapitre 11 à une fonction réelle définie sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 4.

Soit $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet l pour limite en $a \in \mathbb{R}$ si f est définie au voisinage de a et vérifie

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon.$$

On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ et vérifie

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in E,\ x > A \Rightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon.$$

On dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si f est définie au voisinage de $-\infty$ et vérifie

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in E,\ x < -A \Rightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon.$$

Remarque 2. *Dans les trois cas le réel l est unique. Si on suppose maintenant $a \in \bar{\mathbb{R}}$, on note :*

$$l = \lim_a f \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x).$$

▶ Exemple : $x \mapsto x - a$ tend vers 0 en a.
▶ Exemple : La fonction carrée tend vers 0 en 0.
▶ Exemple : La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.
▶ Exemple : La fonction $x \mapsto \exp x$ tend vers 0 en $-\infty$.
▶ Exemple : La fonction $x \mapsto l$ admet pour limite l en tout point de $\mathbb{R}$ et en $\pm\infty$.
▶ Exemple : La fonction $x \mapsto (x-1)^{-2}$ admet pour limite 0 en $\pm\infty$.

Remarque 3. $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - l) = 0$.
Si $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = l$.

Définition 5 (Fonction continue en a).

*Si une fonction f, définie en a, admet une limite finie en a, celle-ci est égale à $f(a)$. On dit alors que f est **continue en** a.*

Remarque 4. *Si une fonction f est définie en a, la fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a.*

▶ Exemple : Toute fonction affine est continue en tout point.

Définition 6 (Prolongement par continuité).

*Soit $f : E \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_a f = l \in \mathbb{R}$ alors la fonction $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}, x \neq a \mapsto f(x)$ et $a \mapsto l$ est continue en a. $\tilde{f}$ s'appelle **prolongement par continuité de f en** a.*

Remarque 5. *Si a est une extrémité de E n'appartenant pas à E, f admet une limite finie en a si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a.*

▶ Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$, définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$. Si on pose $f(0) = 1$, f est continue en 0.

Propriété 1.

Si f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ alors elle est bornée au voisinage de a. Cela signifie qu'il existe $h > 0$ tel que la restriction de f à $]a-h, a+h[\cap E$ est bornée.

Propriété 2.

Si f admet une limite l non nulle en a alors f est non nulle au voisinage de a et du signe de l.

Remarque 6. *Si f admet $l>0$ pour limite en $a\in\bar{\mathbb{R}}$ alors f est minorée par $\frac{l}{2}>0$ au voisinage de a.*
Si f admet $l<0$ pour limite en $a\in\bar{\mathbb{R}}$ alors f est majorée par $\frac{l}{2}<0$ au voisinage de a.
Les propriétés 1 et 2 restent vraies si $a\in\bar{\mathbb{R}}$.
Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 7.

Une fonction f est dite ***définie à droite du réel*** *a si pour tout $\eta>0$, $]a,a+\eta[\cap E\neq\emptyset$.*
Une fonction f est dite ***définie à gauche du réel*** *a si pour tout $\eta>0$, $]a-\eta,a[\cap E\neq\emptyset$.*

► Exemple : $x\mapsto\frac{x}{\sqrt{x}}$ est définie à droite de 0. $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ est définie à gauche de 3. $x\mapsto\frac{1}{x}$ est définie à gauche et à droite de 0. Une fonction qui est définie au voisinage de $a\in\mathbb{R}$ à droite est définie à droite de a.

Définition 8.

Soit f une fonction définie à droite du réel a. On dit que f a une ***limite à droite*** *$l\in\bar{\mathbb{R}}$* ***en*** *a si la restriction de f à $E\cap]a,+\infty[$ admet une limite égale à l lorsque x tend vers a. On note alors $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a,x>a}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{a^+}f=l$.*
Soit f une fonction définie à gauche du réel a. On dit que f a une ***limite à gauche*** *$l\in\bar{\mathbb{R}}$* ***en*** *a si la restriction de f à $E\cap]-\infty,a[$ admet une limite égale à l lorsque x tend vers a. On note alors $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a,x<a}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{a^-}f=l$.*

Propriété 3.

Soit f une fonction définie à droite du réel a. Alors f a une limite à droite $l\in\mathbb{R}$ en a ssi

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in E,\ x\in]a,a+\eta[\Rightarrow|f(x)-l|\leq\epsilon.$$

Soit f une fonction définie à gauche du réel a. Alors f a une limite à gauche $l\in\mathbb{R}$ en a ssi

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in E,\ x\in]a-\eta,a[\Rightarrow|f(x)-l|\leq\epsilon.$$

Propriété 4.

Soit f une fonction définie à droite et à gauche du réel a ***mais pas en*** *a et $l\in\bar{\mathbb{R}}$. Alors f a une limite égale à l en a ssi f a une limite à gauche de a et une limite à droite de a, toutes deux égales à l.*

Une fonction f définie à droite et à gauche du réel a peut ne pas admettre de limite en a mais admettre uniquement une limite à droite ou une limite à gauche en a ou toutes les deux à la fois (distinctes).

► Exemple : $x\mapsto 2x-\frac{|x|}{x}$.

Définition 9.

Soit f une fonction définie en $a\in\mathbb{R}$ et à droite du réel a. On dit que f est ***continue à droite en*** *a si la restriction de f à $E\cap]a,+\infty[$ est continue en a c'est-à-dire ssi $\lim\limits_{a^+}f=f(a)$.*
Soit f une fonction définie en $a\in\mathbb{R}$ et à gauche du réel a. On dit que f est ***continue à gauche en*** *a si la restriction de f à $E\cap]-\infty,a[$ est continue en a c'est-à-dire ssi $\lim\limits_{a^-}f=f(a)$.*

Propriété 5.

Soit f une fonction définie en $a\in\mathbb{R}$ et à gauche et à droite du réel a. Alors f est continue en a ssi elle est continue à gauche et à droite en a.

Une fonction définie en $a \in \mathbb{R}$ à droite et à gauche de a peut être continue à droite ou à gauche en a sans être continue en a.

▶ Exemple : $x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$. $E = \mathbb{R}$. Continuité en $n \in \mathbb{Z}$?

1.4 Limites infinies

Définition 10.

*On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de a et*

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

*On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$ et*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in E,\ x > B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

*On dit que f **tend vers** $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $-\infty$ et*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in E,\ x < -B \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Définition 11.

*On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de a et*

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

*On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $+\infty$ et*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in E,\ x > B \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

*On dit que f **tend vers** $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ lorsque f est définie au voisinage de $-\infty$ et*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in E,\ x < -B \Rightarrow f(x) \leq -A.$$

▶ Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

▶ Exemple : Soit $f\ :\ x \mapsto (x-1)^{-2}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

1.5 Propriété des limites

1.5.1 Fonction positive ou négative

Propriété 6 (Stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Si $\forall x \in E \setminus \{a\},\ f(x) \geq 0$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \geq 0$.

Si $\forall x \in E \setminus \{a\},\ f(x) \leq 0$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \leq 0$.

Propriété 7.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, positive et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = l$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = l$, alors $l \geq 0$.
Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, négative et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = l$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = l$, alors $l \leq 0$.

1.5.2 Comparaison

Propriété 8 (Théorème de comparaison).

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si au voisinage de a on a $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l' \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $l \geq l'$.

En particulier, si $\lim\limits_{x \to a} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty$ (théorème de minoration) et si $\lim\limits_{x \to a} f = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g = -\infty$ (théorème de majoration).

Propriété 9 (théorème d'encadrement des limites).

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Soient f, g, h trois applications définies au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f = \lim\limits_{x \to a} h = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g = l$.

En particulier, si $|f(x)| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

1.5.3 Fonction monotone

Théorème 1 (Théorème de la limite monotone).

Soit f définie sur $]a, b[$ avec $a < b$.

1. *Si f est croissante sur $]a, b[$*
   - *si f est **majorée** alors f a une limite finie quand x tend vers b^- et $\lim\limits_{b^-} f = sup_{]a,b[} f$.*
   - *si f est non majorée alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers b^-.*
   - *Si f est **minorée** alors f a une limite finie quand x tend vers a^+ et $\lim\limits_{a^+} f = inf_{]a,b[} f$.*
   - *si f est non minorée alors f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a^+.*
2. *Si f est décroissante sur $]a, b[$*
   - *si f est **minorée** alors f a une limite finie quand x tend vers b^- et $\lim\limits_{b^-} f = inf_{]a,b[} f$.*
   - *si f est non minorée alors f tend vers $-\infty$ quand x tend vers b^-.*
   - *Si f est **majorée** alors f a une limite finie quand x tend vers a^+ et $\lim\limits_{a^+} f = sup_{]a,b[} f$.*
   - *si f est non majorée alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a^+.*

1.6 Opérations sur les limites

Propriété 10 (Composition).

Soient E et F deux intervalles non réduits à un singleton. Soient $a \in E$ et $b \in F$.
Soient enfin $f : E \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et $g : F \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E \setminus \{a\},\ f(x) \in F \setminus \{b\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$

Remarque 7.
— *Le résultat reste vrai si on remplace l par $\pm\infty$ ou a par $\pm\infty$ ou b par $\pm\infty$*
— *Si f est continue en a et g continue en b et $f(a) = b$ alors $g \circ f$ et continue en a.*

Propriété 11 (Somme, produit, produit par un scalaire).

Soient E un intervalle non réduit à un singleton. Soient $a \in E$ et f et $g : E \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors

$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = l + l'$,

$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = ll'$,

$\forall k \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to a} (kf)(x) = kl$,

$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$,

Si $l \neq 0,\ \exists h > 0,\ \forall x \in E \setminus \{a\} \cap]a-h, a+h[,\ f(x) \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{l}$.

Remarque 8. *Les résultats restent vrais si on remplace a par $\pm\infty$.*
L'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ stable par produit.
Si f est continue en a alors $|f|$ est continue en a.

► Exemple : Soit f telle que $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x \leq 0$. Alors f n'a pas de limite en 0 mais $|f|$ a une limite en 0.

Autres cas : voir tableau.

► Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$.

► Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

► Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sin 3x + x}$.

Propriété 12.

Le produit d'une fonction bornée avec une fonction de limite nulle est une fonction de limite nulle.

1.7 Lien entre limite de fonction et limite de suite

Théorème 2 (Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a).

Soit f définie sur $E \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $E \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 9. *Le résultat est valable si $l = \pm\infty$ ou $a = \pm\infty$.*
Il sert souvent à montrer que'une fonction n'admet pas de limite en a : il suffit de trouver une suite convergeant vers a dont l'image ne converge pas.
De même, pour montrer la discontinuité d'une fonction f en a, on trouve une suite qui converge vers a et dont l'image ne converge pas vers $f(a)$.

► Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ existe-t-elle ?

Propriété 13 (Caractérisation séquentielle[1] de la limite d'une fonction).

Soit f définie sur $E \setminus \{a\}$. f admet une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en a ssi l'image par f de toute suite de E convergeant vers a est une suite convergeant vers l.

2 Continuité en un point

Dans cette section, on suppose que I est un intervalle non réduit à un élément et que $x_0 \in I$. Soit f définie sur I.

On précise que :

— lorsque f n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est discontinue en x_0.

— la continuité d'une fonction f en un point x_0 exige l'appartenance de x_0 à I.

On synthétise ici un certain nombre de propriétés rencontrées dans les paragraphes précédents.

Propriété 14.

1. *Si f est continue en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.*
2. *Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule pas et est du signe de $f(x_0)$.*
3. *Si f est positive sur un voisinage de x_0 (sur $]x_0 - h, x_0 + h[\cap I \setminus \{x_0\} = I_h$) et si f est continue en x_0 alors $f(x_0) \geq 0$.*
4. *Si f est négative sur un voisinage de x_0 (sur $]x_0 - h, x_0 + h[\cap I \setminus \{x_0\} = I_h$) et si f est continue en x_0 alors $f(x_0) \leq 0$.*
5. *Si $f \geq g$ au voisinage de x_0 et f et g continues en x_0 alors $f(x_0) \geq g(x_0)$.*
6. *Si $f \geq g \geq h$ sur I_h et si f, g et h sont continues en x_0 et $f(x_0) = h(x_0)$ alors $g(x_0) = f(x_0) = h(x_0)$.*
7. *Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, avec I et J deux intervalles non réduits à un élément. Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Propriété 15 (Opérations).

Si f et g sont continues en x_0 et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f+g$, fg, αf, $\alpha f + \beta g$ et $|f|$ sont continues en x_0.
Si $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et continue en x_0.

► Exemple : Soit f définie sur I, positive et continue en x_0. On suppose que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Remarque 10 (Structure de l'ensemble des fonctions continues en x_0). *L'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$ continues en x_0 muni de $+$ et $.$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, .)$. Cela signifie que c'est un sous-ensemble non vide et stable par combinaison linéaire de $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, .)$.*

Propriété 16 (Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point).

Soit f définie sur I et $x_0 \in I$. f est continue en x_0 ssi l'image par f de toute suite de points de I convergeant vers x_0 est une suite convergeant vers $f(x_0)$. Cela peut s'exprimer sous la forme :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n).$$

Remarque 11. *Cette propriété est un cas particulier de la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. C'est cette propriété qui est utilisée dans l'étude des suites récurrentes d'ordre 1 (définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$). Elle permet aussi, dans certains cas, de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.*

► Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que cette fonction est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

1. =relatif aux suites

3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On appelle **partie réelle de** f et on note $\mathrm{Re}\,(f)$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}\,(f\,(x))$. $\mathrm{Re}\,(f)$ est définie sur E et est à valeurs réelles.
On appelle **partie imaginaire de** f et on note $\mathrm{Im}\,(f)$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Im}\,(f\,(x))$. $\mathrm{Im}\,(f)$ est définie sur E et est à valeurs réelles.
De plus, $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\mathrm{Im}\,(f)$.

Si $f = u + iv$ avec u et v à valeurs réelles, la fonction $u - iv$ s'appelle **application conjuguée de** f et est notée $\bar{f}$.

On définit $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2} = \sqrt{f\bar{f}}$. $\forall x \in E, \quad |f\,(x)| = |f|\,(x)$; lorsque f ne s'annule pas, on a $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\bar{f}}{|f|^2}$.

On dit que f est **bornée** lorsque $|f|$ est majorée.

Propriété 17.

L'ensemble $\mathcal{B}\,(E, \mathbb{C})$ des applications bornées de E vers $\mathbb{C}$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

Définition 12.

On dit que $f \in \mathcal{E}, \mathbb{C}$admet $\lambda \in \mathbb{C}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $|f - \lambda|$ admet 0 pour limite en a.

Propriété 18.

Soit $f \in \mathcal{E}, \mathbb{C}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$
f admet une limite λ en $a \in \overline{\mathbb{R}} \iff$ Re(f) et Im(f) admettent respectivement des limites l_1 et l_2 réelles en a et alors $\lambda = l_1 + il_2$.

Propriété 19.

Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

Remarque 12. *Concernant les opérations algébriques, les règles sont les mêmes que pour les applications à valeurs réelles.*

Définition 13.

*On dit que f **est continue en** a lorsque f admet une limite en a et est définie en a.*

Propriété 20 (Caractérisation de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires).

f est continue en a si et seulement si Re$\,(f)$ et Im$\,(f)$ le sont.