DS5 cor

Ex 1

① arccos est définie sur $[-1,1]$ et est dérivable sur $]-1,1[$

$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$

$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

② ⓐ on reconnaît un problème de Cauchy. Or un problème de Cauchy admet une unique solution

ⓑ Soit $x>0$, $z(x) = e^{-2x} y(x)$. y est sol de (E_1) donc y est deux fois dér sur $\mathbb{R}_+^*$

z est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables 2 fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x>0 \quad y(x) = e^{2x} z(x)$

$\forall x>0 \quad y'(x) = 2e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x)$

$\forall x>0 \quad y''(x) = 4e^{2x} z(x) + 2e^{2x} z'(x) + 2e^{2x} z'(x) + e^{2x} z''(x)$

Ainsi y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$

ssi $\forall x>0, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$

ssi $\forall x>0, \cancel{4e^{2x} z(x)} + \cancel{4e^{2x} z'(x)} + e^{2x} z''(x) - \cancel{8e^{2x} z(x)} - \cancel{4e^{2x} z'(x)} + \cancel{4e^{2x} z(x)} = \frac{e^{2x}}{x^2}$

ssi $\forall x>0, e^{2x} z''(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$ ssi $\forall x>0 \quad z''(x) = \frac{1}{x^2}$ car $\forall x>0\ e^{2x} \neq 0$

Ainsi y est sol de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi z est sol de (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$

où $\boxed{(E_2) : z''(x) = \frac{1}{x^2}}$.

ⓒ $\forall x>0, \quad z''(x) = \frac{1}{x^2}$ ssi $\exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x>0 \quad z'(x) = -\frac{1}{x} + K_1$

ssi $\exists K_1 \in \mathbb{R}, \exists K_2 \in \mathbb{R}, \forall x>0, z(x) = -\ln x + K_1 x + K_2$

Ainsi y est sol de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$

ssi $\exists (K_1,K_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x>0, \quad y(x) = e^{2x}(-\ln x + K_1 x + K_2)$

Il s'agit maintenant de déterminer K_1 et K_2

$y(1) = e^{2\times 1}(-\ln 1 + K_1 + K_2) = e^2(K_1+K_2)$

et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = 2e^{2x}(-\ln x + K_1 x + K_2) + e^{2x}\left(-\frac{1}{x} + K_1\right)$

donc $y'(1) = 2e^2(-\ln 1 + K_1 + K_2) + e^2(-1+K_1) = e^2(2K_1 + 2K_2 - 1 + K_1)$

Ainsi $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} K_1 + K_2 = e^{-2} \\ 3K_1 + 2K_2 - 1 = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} K_2 = e^{-2} - K_1 \\ 3K_1 + 2e^{-2} - 2K_1 - 1 = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} k_2 = e^{-2} - 1 + 2e^{-2} = 3e^{-2} - 1 \\ k_1 = 1 - 2e^{-2} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{y : x \mapsto e^{2x}\left(-\ln x + (1-2e^{-2})x + 3e^{-2} - 1\right)}$

③ ⓐ • $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ car $\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

• $1_{\mathbb{R}} = 1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ car $1 = a + b\sqrt{2}$ avec $a = 1 \in \mathbb{Q}$ et $b = 0 \in \mathbb{Q}$

• $\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2$, $q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Soit $q_1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $q_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{Q}^2$ et il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{Q}^2$ tq

$q_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ et $q_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$

donc $q_1 - q_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2}$

or $a_1 - a_2 \in \mathbb{Q}$ et $b_1 - b_2 \in \mathbb{Q}$ car $(\mathbb{Q}, +)$ groupe

• $\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]^2$, $q_1 q_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{Q}^2$ et il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{Q}^2$ tq

$q_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ et $q_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$

donc $q_1 q_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 \sqrt{2} + b_1 a_2 \sqrt{2} + b_1 b_2 \sqrt{2}^2$

$= (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{2}$

or $a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \in \mathbb{Q}$ et $a_1 b_2 + b_1 a_2 \in \mathbb{Q}$ car $(\mathbb{Q}, +, \times)$ corps

<u>Concl:</u> $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

De plus $\times$ est commutative sur $\mathbb{R}$ donc $\times$ est commutative sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Donc <u>$(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathbb{R}, +, \times)$</u>

③ ⓑ Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$

$a + b\sqrt{2} = 0$ ssi $b\sqrt{2} = -a$ ssi soit $b = 0$ et alors $a = 0$

soit $b \neq 0$ et alors $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$

or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc on ne peut pas trouver $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}^*$ tq

$\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$

Donc <u>$a + b\sqrt{2} = 0$ ssi $b = a = 0$</u>

③ ⓒ Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^{*2}$. $a + b\sqrt{2}$ est inversible dans $\mathbb{R}$ et

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - b^2 \times 2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

$a - b\sqrt{2} \neq 0$ car $a \neq 0$ et $b \neq 0$

or $\dfrac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $\dfrac{-b}{a^2 - 2b^2}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}^*$ $((\mathbb{Q}, +, \times)$ corps$)$

donc $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ donc $a + b\sqrt{2}$ est inversible dans $\mathbb{Q}$

Tous les éléments non nuls de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sont donc inversibles
Donc $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un corps ! puisque c'est un anneau commutatif distinct de $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et dont tous les éléments non nuls sont inversibles.

Q2

① ⓐ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(u_n) est une suite arithmético géométrique.

Soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $l = \frac{1}{2} l + \frac{1}{2}$ $(l = 1)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}$

$l = \frac{1}{2} l + \frac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - l = \frac{1}{2}(u_n - l)$

donc $(u_n - l)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - l = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - l)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = l + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - l) = \boxed{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1) = u_n}$

or $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$

donc $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ CV vers 0.

Par somme, (u_n) CV vers 1.

① ⓑ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ $\Delta = \frac{1}{4} - 4 \times -\frac{1}{2} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

donc $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ a deux racines : $\frac{+\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $\frac{+\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$

Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda (1)^n + \mu \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

Déterminons λ et μ.

$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \lambda - \frac{\mu}{2} = \beta \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \frac{3\mu}{2} = \alpha - \beta \\ 3\lambda = \alpha + 2\beta \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \lambda = \frac{\alpha + 2\beta}{3} \\ \mu = \frac{2(\alpha - \beta)}{3} \end{cases}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\alpha + 2\beta}{3} + \frac{2}{3}(\alpha - \beta)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

Comme $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$,

$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ CV vers 0.

Donc (u_n) CV vers $\frac{\alpha + 2\beta}{3}$ par somme.

① ⓒ ⓘ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq 1$". Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$

Initialisation $u_0 = a \leq 1$ et $u_1 = b \leq 1$

hérédité

supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$

alors $u_n \leq 1$ et $u_{n+1} \leq 1$. Mq $\mathcal{P}(n+2)$ vraie

$$u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} \min(u_n, 1)$$

$$= \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n \quad \text{car } u_n \leq 1$$

$$\leq \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$$

donc $u_{n+2} \leq 1$ et $\mathcal{P}(n+2)$ vraie

Concl $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

ii Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$, $\min(u_n, 1) = u_n$

Donc (u_n) vérifie 2

Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda (1)^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

De la même façon qu'en 1b, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

et (u_n) CV vers $\frac{a+2b}{3}$

2a i Puisque par hypothèse $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \neq 0$ et on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}.$$

Supposons que le produit (p_n) converge vers ℓ, alors par définition $\ell \neq 0$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1, \quad \text{soit :} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1,$$

et donc

$$\boxed{\text{si le produit } (p_n) \text{ converge, alors la suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$$

2a ii Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{p=1}^{n} \frac{p+1}{p} = \frac{\prod_{p=1}^{n}(p+1)}{\prod_{p=1}^{n} p} = \frac{(n+1)!}{n!},$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = n+1\,;\ \text{le produit } (p_n) \text{ diverge.}}$$

2a iii Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p}$, alors montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: " $p_n \sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin$ " par récurrence

- **Initialisation** : $p_1 \sin\frac{a}{2} = \cos\frac{a}{2} \sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \sin a$.
- **Hérédité** : supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on ait : $p_n \sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin a$. Alors :

$$p_{n+1} \sin\frac{a}{2^{n+1}} = \left(p_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}\right) \sin\frac{a}{2^{n+1}} = p_n \frac{1}{2} \sin\frac{a}{2^n},$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$p_{n+1} \sin\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} \sin a\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sin a.$$

- **Conclusion** : la propriété est héréditaire : on a donc démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin a.}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{\sin a}{2^n} \times \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}.$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_n = \frac{\sin a}{a} \times \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$ or $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ et $X = \frac{a}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times a \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = 1$ et $\boxed{\text{le produit } (p_n) \text{ converge vers } \frac{\sin a}{a}.}$

2b(i) Supposons que la suite (u_n) converge vers 1. Par définition de la limite, avec $\varepsilon = 1$, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \; \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geqslant n_0 \;\Rightarrow\; |u_n - 1| < 1,$$ càd $-1+1 < u_n < 1+1$

et donc, en particulier :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \; \forall n \geqslant n_0, \quad u_n > 0.}$$

2b(ii) Pour tout $n \geqslant n_0$ on a :

$$S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p) = \ln\left(\prod_{p=n_0}^{n} u_p\right).$$

Donc :

$$(S_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)\right)_{n \geqslant n_0} \text{ converge } \Leftrightarrow \left(\prod_{p=n_0}^{n} u_p\right)_{n \geqslant n_0} \text{ converge}$$ vers une limite finie non nulle

et donc :

$$\boxed{(S_n) \text{ converge } \Leftrightarrow (p_n) \text{ converge.}}$$

2b(iii) Supposons que (S_n) converge vers ℓ, alors $\left(\prod_{p=n_0}^{n} u_p\right)_{n \geqslant n_0}$ converge vers e^{ℓ} et donc :

$$\boxed{\text{si } (S_n) \text{ converge vers } \ell, \text{ alors } (p_n) \text{ converge vers : } \left(\prod_{p=1}^{n_0 - 1} u_p\right) e^{\ell}.}$$

2c(i) On considère la fonction $u : x \in [3, +\infty[\mapsto \frac{\ln x}{x}$. Alors u est dérivable et :

$$\forall x \geqslant 3, \quad u'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0.$$

On en déduit que u est décroissante et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \; p \geqslant 3, \; \forall x \in [p, p+1], \quad u(p+1) \leqslant \underline{u(x) \leqslant u(p)},$$

d'où, par croissance de l'intégrale :

$$\int_p^{p+1} u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_p^{p+1} u(p)\,\mathrm{d}x. = u(p)\int_p^{p+1} 1.\mathrm{d}x = u(p)\,[x]_p^{p+1} = u(p$$

soit :

$$\boxed{\forall p \geqslant 3, \quad \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln p}{p}.}$$

2c(ii) Or, d'après la relation de Chasles : forme $u' \times u$ avec $u = \ln x$

$$\sum_{p=3}^{n}\left(\int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de minoration :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ diverge (vers } +\infty).}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\ln(p) = \sum_{p=1}^{n} \ln\left(p^{1/p}\right) = \ln\left(\prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}\right) = \ln(p_n),$$

donc :

$$\boxed{\text{le produit } (p_n) \text{ diverge.}}$$

Ex 3

1 a C'est l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Cet ensemble possède $n!$ éléments

1 b $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq id_{[\![1,4]\!]}$ car $\sigma(3) = 1 \neq 3$.

De plus $\sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id_{[\![1,4]\!]}$ car $\sigma\circ\sigma(1) = \sigma(3) = 1$
$\sigma\circ\sigma(2) = \sigma(2) = 2$
$\sigma\circ\sigma(3) = \sigma(1) = 3$

Donc 2 est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^n = id_{[\![1,4]\!]}$

Donc σ est un élément d'ordre fini et son ordre est égal à 2

1 c $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un élément d'ordre fini et son ordre est égal à 3

car $\sigma' \neq id_{[\![1,4]\!]}$, $\sigma'\circ\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ car $\sigma'\circ\sigma'(1) = \sigma'(3) = 2$
$\sigma'\circ\sigma'(2) = \sigma'(1) = 3$
$\sigma'\circ\sigma'(3) = \sigma'(2) = 1$

donc $\sigma'\circ\sigma' \neq id_{[\![1,4]\!]}$

et $(\sigma'\circ\sigma')\circ\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id_{[\![1,4]\!]}$

car $\sigma'\circ\sigma'\circ\sigma'(1) = \sigma'(2) = 1$, $\sigma'\circ\sigma'\circ\sigma'(2) = \sigma'(3) = 2$ et $\sigma'\circ\sigma'\circ\sigma'(3) = \sigma'(1) = 3$

Donc 3 est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma'^n = id_{[\![1,4]\!]}$

2 a • Soit $(a,a') \in \mathbb{C}^{*2}$ et $(b,b') \in \mathbb{C}^2$ - Soit $z \in \mathbb{C}$

$(f_{a,b} \circ f_{a',b'})(z) = f_{a,b}(f_{a',b'}(z)) = f_{a,b}(a'z+b') = a(a'z+b')+b$
$= aa'z + ab' + b = (aa')z + (ab'+b) = f_{aa',ab'+b}(z)$

Ainsi $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}$

• Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$
Soit $z \in \mathbb{C}$ $(f_{a,b} \circ f_{1,0})(z) = f_{a,b}(f_{1,0}(z)) = f_{a,b}(1z+0) = f_{a,b}(z)$
Donc $f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{a,b}$ (et de même $f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$
car $\forall z \in \mathbb{C}$ $(f_{1,0} \circ f_{a,b})(z) = f_{1,0}(f_{a,b}(z)) = f_{1,0}(az+b) = 1(az+b)+0$
$= f_{a,b}(z)$)

2 b $z \mapsto (-2-2i)z + 4$ est l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{4}{1-(-2-2i)}\right)$, de rapport $|-2-2i|$ et d'angle $\arg(-2-2i)$

cad la similitude de centre $\Omega\left(\frac{4}{3+2i}\right)$, de rapport $\sqrt{8}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

car $-2-2i = \sqrt{8}\ \frac{-2-2i}{\sqrt{8}} = \sqrt{8} \times \frac{-2-2i}{2\sqrt{2}} = \sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{4}{3+2i} = \frac{4(3-2i)}{13}$ s'obtient en résolvant $a\omega + b = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$
avec ici $a = -2-2i \neq 1$ et $b = 4$.

2c Dans le 1er cas il s'agit de $f_{1,3} : z \mapsto z+3$

Dans le 2d cas il s'agit de $f_{e^{i\frac{2\pi}{3}},\,(1-2i)(1-e^{\frac{2i\pi}{3}})}$

en effet la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre $A(1-2i)$ a pour écriture complexe $z' = z_A + e^{\frac{2i\pi}{3}}(z - z_A) = e^{\frac{2i\pi}{3}} z + z_A(1-e^{\frac{2i\pi}{3}})$

2d • $\circ$ est une LCI dans G d'après 2a

car avec les notations de 2a, $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',\, ab'+b}$

or $(a,a') \in \mathbb{C}^*$ donc $aa' \in \mathbb{C}^*$

et $(a,b,b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ donc $ab'+b \in \mathbb{C}$.

donc $f_{a,b} \circ f_{a',b'} \in G$.

• $\circ$ est associative car c'est toujours le cas pour la composition des applications

• $f_{1,0} = id_{\mathbb{C}}$ est l'élément neutre pour $\circ$ dans G

car $1 \in \mathbb{C}^*$ et $0 \in \mathbb{C}$ et on a montré à la q 2a que :

$\forall a \in \mathbb{C}^* \ \forall b \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$

• Tout élément $f_{a,b}$ de G (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) est inversible pour $\circ$ dans G

en effet $f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} = f_{a \times \frac{1}{a},\, a \times \frac{-b}{a} + b} = f_{1,0}$

et $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} = f_{\frac{1}{a} \times a,\, \frac{1}{a} \times b - \frac{b}{a}} = f_{1,0}$

et comme $a \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{a} \in \mathbb{C}^*$ et comme $b \in \mathbb{C}$, $\frac{-b}{a} \in \mathbb{C}$.

<u>Conclusion : $(G, \circ)$ est un groupe</u>

2d Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer par récurrence que

$f_{a,b}^{\,n} = f_{a,b} \circ \dots \circ f_{a,b} = f_{a^n,\, a(a \times (a \times (\dots) + b) + b) + b}$

càd $f_{a,b}^{\,n} = f_{a^n,\, b + ba + ba^2 + \dots + ba^{n-1}} = f_{a^n,\, b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})}$

où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

2f on cherche $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$

tel que $\begin{cases} a^n = 1 \\ b(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) = 0 \end{cases}$ càd tq $f_{a,b}^{\,n} = id = f_{1,0}$.

or $\begin{cases} a^n = 1 \\ b(1+a+\dots+a^{n-1}) = 0 \end{cases}$ ssi Soit $a=1$ et $b=0$, soit $a \neq 1$, $a^n=1$ et $b(1+\dots+a^{n-1})$

ssi Soit $a=1$ et $b=0$, soit $a\neq 1$, $a^n=1$ et $b \underbrace{\frac{1-a^n}{1-a} = 0}_{\text{tjs vrai}}$

ssi Soit $a=1$ et $b=0$, Soit $a \neq 1$ et $a^n = 1$

ssi soit ($a=1$ et $b=0$), soit (a est une racine nième de 1 et $a\neq 1$)

Les éléments d'ordre fini de ce groupe sont $id_{\mathbb{C}} = f_{1,0}$ et les éléments $f_{a,b}$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ tq $a \neq 1$ est une racine de l'unité et $b \in \mathbb{C}$

(3) $B = \{a \in G, \exists m \in \mathbb{N}^*, x^m = e\}$ et $(G, *)$ groupe commutatif.

- $B \neq \emptyset$ car $e^1 = e$ et $e \in G$ donc $e \in B$
- Soient a et b deux éléments de B. Mq $a * b^{-1} \in B$.

Comme $a \in B$, $a \in G$ et il existe $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tq $a^{m_1} = e$

Comme $b \in B$, $b \in G$ et il existe $m_2 \in \mathbb{N}^*$ tq $b^{m_2} = e$

$$(a*b^{-1})^{m_1 \times m_2} = a^{m_1\times m_2} * (b^{-1})^{m_1 \times m_2} \quad \text{car } * \text{ est commutative dans } G$$
$$= (a^{m_1})^{m_2} * (b^{m_2})^{-m_1}$$
$$= e^{m_2} * e^{-m_1} = e * e = e$$

donc $a*b^{-1} \in B$ puisque $a*b^{-1} \in G$ ($(G,*)$ est un groupe) et on a trouvé $m_1 m_2 \in \mathbb{N}^*$ tq $(a*b^{-1})^{m_1 m_2} = e$

(4) (a) Attention $(G,*)$ est un groupe dans cette question mais on n'a pas que $*$ commutative dans G. Soit $(a,b) \in G^2$

On sait que $a^2 = e$, $b^2 = e$ et $(a*b)^2 = e$

Comme $a \in G$, a est inversible pour $*$ dans G donc $a^{-1} \in G$. Comme $a^2 = e$, $a*a = e$ donc $a^{-1}*a*a = a^{-1}*e$

Donc $a = a^{-1}$. De même $b = b^{-1}$ et $(a*b)^{-1} = a*b$.

or $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = b*a$

Donc $b*a = a*b$.

(4) (b) Soit $a \in G$.

On suppose que a est un élément d'ordre fini et on note n son ordre

D'une part $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$ donc a^{-1} est un élément d'ordre fini. Notons n' son ordre.

l'ordre de a^{-1} est le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tq $(a^{-1})^p = e$
or $(a^{-1})^n = e$ donc on en déduit que $n' \leq n$.
De la même façon, $a^{-n'} = (a^{-1})^{n'} = e$ donc $(a^{n'})^{-1} = e$ donc $a^{n'} = e^{-1}$
et $e^{-1} = e$ donc $a^{n'} = e$ et comme
l'ordre de a est le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tq $a^p = e$, on en déduit que $n' \leq n$.
Conclusion $n \leq n'$ et $n' \leq n$ donc $n = n'$.

4 c Soit $a \in G$, $b \in G$
on suppose que a est d'ordre fini. On note n son ordre
Mq $b * a * b^{-1}$ est d'ordre fini.

$$(b*a*b^{-1})^n = (b*a*b^{-1}) * (b*a*b^{-1}) * \dots * (b*a*b^{-1})$$
$$= b * a^n * b^{-1} \text{ (à montrer par récurrence)}$$
$$= b * e * b^{-1} = b * b^{-1} = e.$$

Donc $b*a*b^{-1}$ est d'ordre fini. On note n' son ordre.
Comme $(b*a*b^{-1})^n = e$, $n' \leq n$.
De plus $a^{n'} = b^{-1} * (b*a*b^{-1})^{n'} * b = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$
donc $n \leq n'$
Conclusion $n \leq n'$ et $n' \leq n$ donc $n = n'$
et a et $b*a*b^{-1}$ ont le même ordre

4 d On applique le 4 c avec $a*b$ dans le rôle de a.
Comme $a \in G$, et $b \in G$ et comme $a*b$ est d'ordre fini ($a*b \in G$),
on peut affirmer d'après 4 c que :
$b * (a*b) * b^{-1}$ est aussi d'ordre fini
or $b*(a*b)*b^{-1} = (b*a) * (b*b^{-1}) = (b*a)*e = b*a$.
Donc $b*a$ est aussi d'ordre fini.
Et d'après 4 c $a*b$ et $b*a$ ont le même ordre