TD 13

Ex 6 $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(u_n) = 0$

Donc si f possède une limite en $+\infty$, cette limite est 0 (propr 13)

or $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = \dfrac{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2}}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 1$

Donc si f possède une limite en $+\infty$, cette limite est 1 Contradiction

Donc f ne possède pas de limite en $+\infty$.

Ex 11 1) aspect global : f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme quotient défini et composée de fonctions continues. De même f est continue sur $]0, +\infty[$

aspect local : au voisinage de 0 :

on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$

or $\forall x \neq 0$ $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0

Concl : f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) aspect global : f est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction constante) et sur $]1, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions continues.

aspect local $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$

Ainsi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 = f(1)$

Donc f est continue en 1

Concl f est continue sur $\mathbb{R}$

3) Rq : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$ et donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ Sur tout intervalle $]n, n+1[$, f est continue car la fonction partie entière l'est et $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Etudions la continuité de f en n

$f(n) = \lfloor n \rfloor + \sqrt{n - \lfloor n \rfloor} = n + 0 = n$

Soit $x \in]n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $\forall x \in]n, n+1[$, $f(x) = n + \sqrt{x - n}$

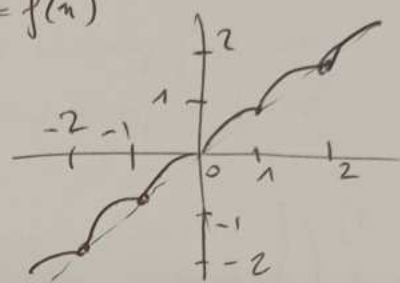
donc $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$

Soit $x \in]n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ donc $\forall x \in]n-1, n[$, $f(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1}$

donc $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n$

Ainsi $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n = f(n)$

donc f est continue en n.



Concl : f est continue sur $\mathbb{R}$

Ex 4 $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(b-a))$

$2 \sin a \cos b = \sin(b+a) - \sin(b-a)$

$2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} = \sin p - \sin q$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right|$

$\leq 2 \left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

car sin cont en 0.

Ex 5 Soit $f = \sin$

Soit $u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $v_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ définis pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors (u_n) cv vers $+\infty$ et (v_n) aussi.

et $f(u_n)$ cv vers 1 car elle est constante égale à 1

$f(v_n)$ cv vers -1 car elle est constante égale à -1

Si f admet une limite l en $+\infty$ alors la limite de toute suite de limite $+\infty$ serait l (prop 13)

or on a trouvé 2 suites (u_n) et (v_n) tendant vers $+\infty$ toutes 2 de limites différentes

Concl : f n'a pas de limite en $+\infty$.

TD13

Ex 14

① $\mathcal{D}f=\mathbb{R}$.

f est définie sur un voisinage de 0 contenant 0. Il faut donc étudier la continuité de f en 0.

Pour $x\neq 0$ $\frac{\pi}{x}-1<\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor\leq\frac{\pi}{x}$

donc pour $x>0$ $\pi-x<x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor\leq\pi$

et par le th des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0^+} x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor=\pi$

De même pour $x<0$ $\pi\leq x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor<\pi-x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor=\pi$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor=\lim\limits_{x\to 0^+} x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor=\pi$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor\frac{\pi}{x}\rfloor=\pi$

Comme sin est continue en π, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{y\to\pi}\sin y=\sin\pi=0$.

② $\mathcal{D}f=\mathbb{R}_+^*$ donc f est définie sur un voisinage de 0 ne contenant pas 0

Il faut donc étudier un éventuel prolongement par continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ (CC)

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

③ $\mathcal{D}f=]0,+\infty[$ f est donc définie sur un voisinage de 0 ne contenant pas 0 Il faut donc étudier un éventuel prolongement par continuité en 0

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ donc on ne peut pas prolonger f par continuité en 0

④ $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\mathcal{D}f=\mathbb{R}^*$ f est donc définie sur un voisinage de 0 ne contenant pas 0. Il faut donc étudier un éventuel prolongement par continuité en 0

$\forall x\neq 0$ $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$

$\forall x>0$ $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ donc par th encadrement $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\forall x<0$ $x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq -x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

Ex 15 $I \subset \mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{C}$

on suppose que f admet une limite en $a \in I$.

On ne peut pas appliquer la prop 10 composition des limites car $\forall t \in I,\ f(t) \in \mathbb{C}$

Nous ne disposons pas de notion de limite pour les fonctions définies sur un ensemble qui n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Or ici exp est définie sur $\mathbb{C}$.

Soit $t \in I$ $\quad \exp\circ f(t) = \exp(f(t)) = \exp(\mathrm{Re}(f(t)) + i\,\mathrm{Im}(f(t)))$

$$= \exp(\mathrm{Re}(f(t)))\exp(i\,\mathrm{Im}\,f(t))$$

$$= \exp(\mathrm{Re}(f(t)))\left[\cos(\mathrm{Im}(f(t))) + i\sin(\mathrm{Im}(f(t)))\right]$$

Par les théorèmes du cours (prop 10 et 11)

$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(f(t))}\cos(\mathrm{Im}(f(t)))$ admet une limite en a

comme composées et produit de fonctions

$t \mapsto e^{\mathrm{Re}(f(t))}\sin(\mathrm{Im}(f(t)))$ aussi pour les mêmes raisons

donc par la propriété 18.

Ex 10 Soit $x \neq -1$

$$f(x) - \frac{a+3}{2} = \frac{ax^2+2x+1}{x+1} - \frac{a+3}{2} = \frac{2ax^2+4x+2-(ax+3x+a+3)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{2ax^2+4x+2-ax-3x-a-3}{2(x+1)} = \frac{2ax^2+(1-a)x-a-1}{2(x+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} 2ax^2+(1-a)x-a-1 & x-1 \\ \hline 2ax^2-2ax & 2ax+(1+a) \\ \hline (1+a)x-a-1 & \\ (1+a)x-(a+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \frac{(x-1)(2ax+(1+a))}{2(x+1)}$$

Comme on cherche la limite en 1, on peut poursuivre en supposant que $x \in]0,2[$ pour simplifier.

Alors si $a > 0$, $1+a < 2ax+1+a < 4a+1+a = 1+5a$

si $a < 0$, $5a+1 < 2ax+1+a < 1+a$

si $a = 0$ $\quad 2ax+1+a = 1$

et $1 < x+1 < 3$ d'où $0 < \frac{1}{x+1} < 1$

Donc dans tous les cas $|2ax+1+a| \leq \max(|1+a|, |5a+1|) = M$

On a donc $\left|f(x) - \frac{a+3}{2}\right| < \frac{M}{2}|x-1|$

Soit $\varepsilon > 0$ On pose $\eta = \frac{2\varepsilon}{M}$

alors si $|x-1| < \eta$, $\left|f(x) - \frac{a+3}{2}\right| < \frac{M}{2}|x-1| < \frac{M}{2} \times \frac{2\varepsilon}{M} = \varepsilon$

donc $\left|f(x) - \frac{a+3}{2}\right| \leq \varepsilon$