

Exercice 1

Dans tout cet exercice, T désigne une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit par récurrence la suite (x_n) par $x_{n+1} = T(x_n)$, pour tout entier naturel n .

On suppose que T est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|T(x) - T(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que T admet au plus un point fixe.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_n - x_0| \leq \frac{1 - k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|.$$

En déduire que (x_n) est bornée.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que T admet un unique point fixe, puis que (x_n) converge vers ce point fixe.

Exercice 2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit qu'un élément a de A est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Si $x \in A$ est nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible et calculer son inverse (on utilisera $1 - x^n$).
2. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que a soit inversible, $ab = ba$ et b soit nilpotent. Montrer que $a + b$ est inversible et donner son inverse.
3. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que $ab = ba$. Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents.
4. Soit $(a, b) \in A^2$ tel que ab soit nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.

Exercice 3

Montrer que $1 \vee 2 \vee \cdots \vee (2n) = (n+1) \vee (n+2) \vee \cdots \vee (2n)$. Pour cela on montrera l'égalité entre l'ensemble des multiples communs à 1, 2, $\dots$, $2n$ et l'ensemble des multiples communs à $(n+1)$, $(n+2)$, $\dots$, $2n$.