Exercice 1

1. Regarder la vidéo suivante (histoire des maths sur l'hypothèse de Riemann, s'installer confortablement et se laisser porter) : `https://www.youtube.com/watch?v=02rHA_Ay13M`. Attention bien recopier le tiret bas entre les deux A dans l'adresse et d'ajouter Ay13M.
2. Faire des recherches sur les termes suivants et écrire sur votre copie une ou deux phrases synthétisant les infos sur chaque terme :
   (a) Nombre premier de Mersenne
   (b) Nombre premier de Fermat
   (c) Nombres premiers jumeaux
   (d) Cryptographie à clé publique, RSA
   (e) Test de primalité (s'intéresser à un test de votre choix)
   (f) Spirale d'Ulam
   (g) Conjecture de Goldbach
   (h) Indicatrice d'Euler
   (i) Lien entre fonction Zeta de Riemann et produit eulérien
   (j) Fonction pi de compte des nombres premiers

   Je vous conseille par exemple de chercher ces informations sur le site http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Premier/aiguilla.htm qui est très bien fait.

   Je vous rappelle que dans le programme de MPSI il est écrit page 3 : « Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques. »

Exercice 2

On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

1. (a) Soit $(G,)$ un groupe fini commutatif d'ordre n, d'élément neutre e_G. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^n = e_G$.
   (b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$. Montrer l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = \mathbb{U}_n$.
2. Soit $(m, n) \in N^{*2}$
   (a) Montrer que $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$ si et seulement si m divise n.
   (b) Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{m \wedge n}$.
   (c) Montrer que le sous-groupe de $\mathbb{U}$ engendré[1] par $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$ est $\mathbb{U}_{m \vee n}$.
3. Ces deux dernières questions sont facultatives. Soit p un nombre premier et $G_p = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.
   (a) Montrer que G_p est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.
   (b) Montrer que G_p est infini, mais que tous ses sous-groupes propres (i.e. distincts de G_p) sont finis.

Exercice 3

1. Regarder la video https://youtu.be/LLR4dzDV9yQ?si=1UPJkPysFNfFkj4W.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, a]$.
3. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
5. Que dire de l'uniforme continuité de l'application réciproque d'une fonction uniformément continue ?

1. le sous-groupe de $\mathbb{U}$ engendré par $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$ est le plus petit sous groupe (au sens de l'inclusion) de $\mathbb{U}$ contenant $\mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n$