Semaine du 27/01

Chapitre 14 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans Z, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples d'entiers associés. Théorème de la division euclidienne.

PGCD et algorithme d'Euclide PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}$, PGCD de ka et kb. Extension au cas de deux entiers relatifs. Relation de Bézout. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu. PPCM. Notation $a \vee b$.

Entiers premiers entre eux Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Forme irréductible d'un rationnel. Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n , alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. En- tiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Nombres premiers Nombre premier. Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Pour p premier, valuation p-adique. Valuation p-adique d'un produit. Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.

Congruences Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b[n]$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat

Question de cours avec démonstration :

- Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si $a \wedge b = 1$ et si $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = 1$ (propr 8.1).
  Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n (propr 8.3).
- $\diamond$ Caractérisation de la valuation et valuation d'un produit (prop 15 et 16).
- $\diamond\diamond$ Petit théorème de Fermat (théorème 4)
- Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier (propr 14.3).

Chapitre 15 : Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Principe de démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réci- proque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Question de cours avec démonstration :

- $\diamond\diamond$ Toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I (exercice sous la propr 2).
- Théorème des valeurs intermédiaires (théorème 1)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

- f est continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$. Montrer que f admet un **point fixe**[1]
- Soit $f\ :\ x \mapsto 1 - 2\cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f([-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}])$
- Soit n un entier non multiple de p. Montrer que $n^{p-1} \equiv 1[p]$.

1. on appelle point fixe pour f tout réel c appartenant à l'ensemble de définition de f tel que $f(c) = c$, c'est-à-dire tout réel qui annule la fonction $x \mapsto f(x) - x$ ou aussi toute solution réelle de l'équation $f(x) - x = 0$.

Merci de proposer aux élèves ⊕ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à utiliser un inverse modulo n pour résoudre une équation exprimée sous la forme d'une congruence modulo n. Les exercices porteront ensuite sur les nombres premiers (décomposition en facteurs premiers, valuation), les congruences, les équations diophnatiennes, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes, la fonction réciproque d'une fonction strictement monotone continue sur un intervalle ...
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj ⊕
Postel Esteban ⋄

G3 Boulard Louna (LV2) ⋄⋄
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon ⋄
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo ⋄⋄
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) ⊕

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla ⋄

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre ⋄
Simon Robert ⋄⋄
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed ⋄
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys ⋄

G15 Canon Asybiade ⋄
Loudahi Abraham
Ramzi Sara ⊕

G16 : Moussaïd Soufiane ⊕
Watel Aurélien ⋄
Le Gociv Edenn