Semaine du 03/02

Chapitre 15 : Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Principe de démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réci- proque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité aux fonctions à valeurs complexes. Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes. Théorème de Heine.

Question de cours avec démonstration :

1. $\diamond\diamond$ Soit $a > 0$. La fonction carrée est uniformément continue sur $[0, a]$ et n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ (ex au dessus du th3).
2. Théorème de Heine (théorème 3).

Chapitre 16 : Matrices

Ensembles de matrices Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire, produit matriciel (bilinéarité, associativité). Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. Transposée d'une matrice. Notation A^T. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Systèmes linéaires Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé. Système compatible. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A. Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X0 + Y$, où $X0$ est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Interprétation matricielle des opérations élémentaires Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices de transvection, de permutation et de dilation. Inversibilité de ces matrices. Traduction matricielle de l'algrithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$. Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Anneau des matrice carrées Anneau $M_n(\mathbb{K})$. Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents. Matrice identité, matrice scalaire. Notation I_n . Matrices symétriques, antisymétriques. Notations $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$. Formule du binôme. Application au calcul de puissances. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires.
Matrices carrées inversibles Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Notation $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'une transposée. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$. Toute technicité est exclue. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire. Cas particulier des matrices diagonales.

Question de cours avec démonstration :

1. associativité du produit matriciel (propr2)
2. ($\diamond$ $\diamond$) transposée d'un produit (propr9)
3. ($\diamond$) produit de deux matrices triangulaires supérieures (propr 13)
4. A est inversible ssi $\forall B,\ AX = B$ admet une unique solution (propr 25 item 1 et 4)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

— Décomposer la matrice rectangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ en un produit de la forme $A = ER$ où R est échelonnée réduite par lignes et E est un produit de matrices élémentaires
— Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ (dm8 exercice 3.3 corrigé dans le cahier de prépa)
— Trouver deux matrices triangulaires supérieures dont les produits ne commutent pas. Non corrigé en classe, essayez de trouver deux matrices carrées d'ordre 3 qui conviennent. Venir me voir lundi matin si difficulté rencontrée.

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à interpréter matriciellement sur un exemple concret d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une opération élémentaire sur les lignes en terme de produit matriciel, puis déterminer rapidement l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 par la méthode du pivot de Gauss ou par la méthode de résolution d'un système. Les exercices porteront ensuite sur la recherche de puissances de matrices, sur les matrices carrées particulières (symétriques, triangulaires,...), sur l'inversibilité, sur des exercices plus théoriques sur le cacul matriciel, sur la continuité sur un intervalle (équations fonctionnelles type $f(x+y) = f(x)f(y)$ (celle-ci a été traitée en td), uniforme continuité, fonction à valeurs complexes...).
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre $\diamond$
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$

Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien $\diamond$
Le Gociv Edenn