Exercice 1 ① On raisonne par l'absurde

Supposons que T admet 2 points fixes c_1 et c_2 qui sont tous les deux réels.

Alors $T(c_1)=c_1$ et $T(c_2)=c_2$

$|c_1-c_2| = |T(c_1)-T(c_2)| \leq k\,|c_1-c_2|$ car T est contractante de rapport k avec $k\in[0,1[$

Ainsi $|c_1-c_2| - k\,|c_1-c_2| \leq 0$ donc $(1-k)\,|c_1-c_2|\leq 0$ avec $1-k\in]0,1]$

donc $|c_1-c_2|\leq 0$ or $|c_1-c_2|\geq 0$ donc $|c_1-c_2|=0$ donc $c_1=c_2$

et T <u>admet au plus un point fixe</u>, c'àd que T admet 0 ou 1 point fixe.

② • Soit $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: " $|x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|$ "

Raisonnons par récurrence.

<u>Initialisation</u> : si $n=0$ alors $|x_1-x_0| = 1|x_1-x_0| \leq 1\,|x_1-x_0|$ et $k^0=1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

<u>hérédité</u> : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. T est contractante de rapport k

$|x_{n+2}-x_{n+1}| = |T(x_{n+1})-T(x_n)| \leq k\,|x_{n+1}-x_n|$

or par HR $|x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|$

Donc $|x_{n+2}-x_{n+1}| \leq \underbrace{k\times k^n}_{k^{n+1}}|x_1-x_0|$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

<u>Concl</u> : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

• $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de rapport $k\in[0,1[$ donc elle converge vers 0

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}$ $|x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|x_1-x_0|=0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

③ Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$|x_n-x_0| = |x_n-x_{n-1}+x_{n-1}-x_{n-2}+x_{n-2}+\dots+x_2-x_1+x_1-x_0|$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}-x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|x_{i+1}-x_i|$$ par l'inégalité triangulaire généralisée

or d'après ② pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $|x_{i+1}-x_i|\leq k^i|x_1-x_0|$

Donc $|x_n-x_0|\leq \sum_{i=0}^{n-1}k^i|x_1-x_0|$

or $\sum_{i=0}^{n-1}k^i|x_1-x_0| = |x_1-x_0|\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}k^i}_{\text{somme des termes d'une suite géo de raison } k\neq 1} = |x_1-x_0|\times\dfrac{k^0-k^n}{1-k} = \boxed{\dfrac{1-k^n}{1-k}|x_1-x_0|}$

donc $|x_n - x_0| \leq \frac{1-k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$ or $k \in [0,1[$ donc $k^n \in [0,1[$ et $1-k^n \in [0,1[$

donc $\frac{1-k^n}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$ donc $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{1-k}|x_1 - x_0|$.

il existe donc $M = \frac{1}{1-k} \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|x_n - x_0| \leq M|x_1 - x_0|$

càd $\forall n \in \mathbb{N}^*, -M|x_1 - x_0| \leq x_n - x_0 \leq M|x_1 - x_0|$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 - M|x_1 - x_0| \leq x_n \leq M|x_1 - x_0| + x_0$.

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et comme $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

4) (x_n) est une suite de réels qui est bornée donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admet une sous-suite convergente. Notons $(x_{\varphi(n)})$ cette sous-suite, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ et notons l sa limite ($l \in \mathbb{R}$).

D'après q②, $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ donc ~~si~~ on pose: $\forall n$ $u_n = x_{n+1} - x_n$ alors (u_n) CV vers 0 donc toute suite extraite de (u_n) converge vers 0 donc $(u_{\varphi(n)})$ CV vers 0 donc $\lim_{n\to+\infty}(x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) = 0$

or $x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)} = T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left(T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right) = 0$

or $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$

et comme T est continue sur $\mathbb{R}$ donc en l, $\lim_{n\to+\infty} T(x_{\varphi(n)}) = T(\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}) = T(l)$.

Comme ces 2 limites existent, on peut affirmer par linéarité de la limite que

$0 = \lim_{n\to+\infty}\left(T(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} T(x_{\varphi(n)}) - \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$

D'où $0 = T(l) - l$ donc $T(l) = l$.

T admet donc un point fixe, l. Or d'après ① T admet au plus un point fixe donc T admet un unique point fixe : l.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: " $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$ "

on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

Initialisation : $|x_0 - l| \leq 1|x_0 - l|$ et $k^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$|x_{n+1} - l| = |T(x_n) - T(l)| \leq k|x_n - l|$

or HR : $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$ donc $|x_{n+1} - l| \leq \underbrace{k \cdot k^n}_{k^{n+1}}|x_0 - l|$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

Or (k^n) est une suite géo qui converge vers 0 donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$ et $\lim_{n\to+\infty} k^n|x_0 - l| = 0$

donc $(x_n - l)$ converge vers 0 donc (x_n) converge vers l.

Exercice 2 Soit $(A,+,\times)$ un anneau

(1) Soit $x \in A$ un élément nilpotent de A

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $x^n = 0$.

Ainsi $1^n - x^n = 1$ et $1^n - x^n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} 1^k x^{n-1-k}$ car $1\times x = x \times 1$

Donc $1 = (1-x) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}$ donc $1-x$ est

De plus $\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\right)(1-x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\right)\times 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\right) \times x$

par distributivité de $\times$ par rapport à $+$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x^{n-k-1} - x^{n-k}\right)$$

$$= 1 - x^n = 1$$

Donc $1 = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\right)(1-x)$

et $1-x$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$

(2) Soit $(a,b) \in A^2$ tq a est inversible, $ab=ba$ et b est nilpotent

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $b^n = 0$.

$a^{2n} - b^{2n} = a^{2n}$ d'une part car $b^{2n} = (b^n)^2 = 0^2 = 0$

D'autre part, $a^{2n} - b^{2n} = (a^2)^n - (b^2)^n = (a^2 - b^2)\sum_{k=0}^{n-1} (a^2)^k (b^2)^{n-1-k}$

car $ab=ba$

Donc $a^{2n} = (a-b)(a+b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{2k} b^{2n-2-2k}$

Donc il existe $c = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{2k} b^{2n-2-2k} \in A$ tq $a^{2n} = (a+b)c$

$= c(a+b)$

à vérifier en utilisant $ab=ba$

De plus a est inversible. Notons a^{-1} son inverse

donc $a^{2n} \times a^{-2n} = a^{2n} \times (a^{2n})^{-1} = 1$ et comme $a^{2n} = (a+b)c$

on a : $1 = (a+b)ca^{-2n}$

De même $a^{2n} = c(a+b)$ donc $1 = a^{-2n}c(a+b)$

Et comme $ab=ba$, $a^{-2n}c = ca^{-2n}$ donc $1 = ca^{-2n}(a+b)$

Donc il existe $d = ca^{-2n}$ tel que $d \in A$ et $1 = (a+b)d = d(a+b)$

Donc $a+b$ est inversible d'inverse $(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{2k} b^{2n-2-2k}\right) \cdot a^{-2n}$.

Autre méthode : ~~utiliser~~ $a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^k b^{2p-k}$

(3) on suppose que a et b sont nilpotents et que $ab = ba$
il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tq $a^{n_1} = 0$
il existe également $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tq $b^{n_2} = 0$.

$$(ab)^{n_1} \underset{ab=ba}{=} a^{n_1} b^{n_1} = 0 \times b^{n_1} = 0$$ donc $\underline{ab \text{ est nilpotent}}$ $(n_1 \in \mathbb{N}^*)$

$$(a+b)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} a^k b^{n_1+n_2-k} \quad \text{car } ab = ba$$

relation de Chasles
$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1+n_2}{k} a^k b^{n_1+n_2-k} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} a^k b^{n_1+n_2-k}$$

la 1ère somme est nulle car $\forall k \in [\![0, n_1]\!]$, $n_1 - k \geq 0$ donc $n_2 + n_1 - k \geq n_2$
donc $\forall k \in [\![0, n_1]\!]$, $b^{n_1+n_2-k} = b^{n_2} \times b^{n_1-k} = 0 \times b^{n_1-k} = 0$.
la 2e somme est nulle car $\forall k \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]$, $k > n_1$ donc $k - n_1 > 0$
donc $\forall k \in [\![n_1+1, n_1+n_2]\!]$, $a^k = a^{n_1} \times a^{k-n_1} = 0 \times a^{k-n_1} = 0$.

Donc $(a+b)^{n_1+n_2} = 0$
on a trouvé $N = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}^*$ (car $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*$) tq $(a+b)^N = 0$
donc $\underline{a+b \text{ est nilpotent}}$.

(4) on suppose que ab est nilpotent
alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $(ab)^n = 0$

$$(ba)^{n+1} = \underbrace{ba \times ba \times \dots \times ba}_{n+1 \text{ facteurs}} = b \times (\underbrace{ab \times \dots \times ab}_{n \text{ facteurs}}) \times a$$ par associativité de $\times$

donc $(ba)^{n+1} = b \times (ab)^n \times a = b \times 0 \times a = 0$ et $n+1 \in \mathbb{N}^*$

donc $\underline{ba \text{ est nilpotent}}$.

Exercice 3 Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Soit $A_m = \mathcal{M}(1) \cap \dots \cap \mathcal{M}(2n) = \mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \cap \dots \cap 2n\mathbb{Z}$

Soit $B_m = \mathcal{M}(n+1) \cap \dots \cap \mathcal{M}(2n) = (n+1)\mathbb{Z} \cap \dots \cap (2n)\mathbb{Z}$

Mq $A_m = B_m$ par double inclusion

- Mq $A_n \subset B_n$

soit $a \in A_m$ alors $a \in \mathcal{M}(1) \cap \mathcal{M}(2) \cap \dots \cap \mathcal{M}(2n)$

alors en particulier $a \in \mathcal{M}(n+1)$ et $a \in \mathcal{M}(n+2)$ .... et $a \in \mathcal{M}(2n)$

donc $a \in \mathcal{M}(n+1) \cap \dots \cap \mathcal{M}(2n)$ donc $a \in B_m$. Concl : $A_m \subset B_m$

- Mq $B_n \subset A_m$

Soit $b \in B_m$ alors $b \in \mathcal{M}(n+1) \cap \dots \cap \mathcal{M}(2n) = \bigcap_{k=m+1}^{2n} \mathcal{M}(k)$

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. On veut mq $b \in \mathcal{M}(i)$, càd $i \mid b$.

Pour cela on écrit la division euclidienne de $2n$ par i :

il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$2n = qi + r$ avec $0 \leq r < i$

alors $qi = 2m - r$. Or $-i < -r \leq 0$ donc $2n - i < 2n - r \leq 2n$

et comme $i \in [\![1, m]\!]$, $m \leq 2n - i \leq 2n - 1$, on peut affirmer

que $2n - r \in [\![m+1, 2n]\!]$ donc que $qi \in [\![m+1, 2n]\!]$.

Or b est un multiple commun à $m+1, \dots, 2n$ et $qi \in [\![m+1, 2n]\!]$ $\Big\}$ donc b est

un multiple de qi donc b est un multiple de i

On a montré que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $b \in \mathcal{M}(i)$

Donc $b \in \mathcal{M}(1) \cap \dots \mathcal{M}(m)$ donc $b \in A_m$.

Concl : $B_m \subset A_m$

Rq on peut aussi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$: "$A_n = B_n$" est vraie par récurrence

- initialisation : $A_1 = \mathcal{M}(1) \cap \mathcal{M}(2) = \mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z}$ or $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ donc $\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$

$B_1 = \mathcal{M}(2) = 2\mathbb{Z}$ donc $A_1 = B_1$ et $\mathcal{P}(1)$ vraie

- hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un n fixé

$A_{n+1} = (\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \cap \dots \cap (n+1)\mathbb{Z} \cap \dots (2n)\mathbb{Z}) \cap (2n+1)\mathbb{Z} \cap (2n+2)\mathbb{Z} = A_n \cap (2n+1)\mathbb{Z} \cap (2n+2)\mathbb{Z}$

HR $\Rightarrow$ $= B_n \cap (2n+1)\mathbb{Z} \cap (2n+2)\mathbb{Z} = \underline{(n+1)\mathbb{Z}} \cap \dots \cap (2n)\mathbb{Z} \cap (2n+1)\mathbb{Z} \cap \overline{(2n+2)\mathbb{Z}}$

or $(2n+2)\mathbb{Z} = 2(n+1)\mathbb{Z} \subset (n+1)\mathbb{Z}$ donc $(n+1)\mathbb{Z} \cap (2n+2)\mathbb{Z} = \overline{(2n+2)\mathbb{Z}}$

donc $A_{n+1} = \underline{(n+1)\mathbb{Z}} \cap (n+2)\mathbb{Z} \cap \dots \cap (2n+1)\mathbb{Z} \cap \underline{(2n+2)\mathbb{Z}}$ $\cap$ com

$= \underline{(n+1)\mathbb{Z} \cap (2n+2)\mathbb{Z}} \cap (n+2)\mathbb{Z} \cap \dots \cap (2n+1)\mathbb{Z}$ $\cap$ assoc

$= (2n+2)\mathbb{Z} \cap \left((n+2)\mathbb{Z} \cap \dots \cap (2n+1)\mathbb{Z}\right)$ $\cap$ com

$= \left((n+2)\mathbb{Z} \cap \dots \cap (2n+1)\mathbb{Z}\right) \cap (2n+2)\mathbb{Z}$

$= B_{n+1}$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- Concl $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}(n)$ vraie