TD15 exo 1

- f est continue sur I et f ne s'annule pas sur I donc par la propriété de Cauchy, f garde un signe constant sur I.

De même pour g.

De plus, $\forall x \in I, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2$

ssi $\forall x \in I, \quad \sqrt{(f(x))^2} = \sqrt{(g(x))^2}$

ssi $\forall x \in I, \quad |f(x)| = |g(x)|$

ssi $\forall x \in I, \quad f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$

Or on doit montrer que $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ ou $\forall x \in I, f(x) = -g(x)$

Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $x_1 \in I$ tq $f(x_1) = g(x_1)$ et $x_2 \in I$ tq $f(x_2) = -g(x_2)$

Comme g garde un signe constant sur I et que g ne s'annule pas sur I, on en déduit que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont de signes opposés donc $f(x_1)f(x_2) < 0$

Comme f est continue sur I, par la propriété de Cauchy, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(c) = 0$. Absurde car f ne s'annule pas sur I.

Concl : $\forall x \in I, f(x) = g(x)$ ou $\forall x \in I, f(x) = -g(x)$

- le résultat ne subsiste pas si on ne suppose plus f et g continues

  Par ex : si $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$ et g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}^+$ et $g(x) = -1$ sinon

- le résultat ne subsiste pas si on ne suppose plus que I est un intervalle

  Par ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$ et g est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = 1$ si $x > 0$ et $g(x) = -1$ si $x < 0$

- le résultat ne subsiste pas si f peut s'annuler

  Par ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$

TD15 ex 2

- Soit $h = f - g$. Comme $f > g$ sur $[a,b]$, $h > 0$ sur $[a,b]$
h est continue sur $[a,b]$ car f et g le sont
donc par le théorème des bornes atteintes, h atteint ses bornes
sur $[a,b]$ donc $\exists c \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b], h(x) \geq h(c)$.
Posons $\lambda = h(c)$
Comme $h > 0$ sur $[a,b]$, $h(c) > 0$.
Ainsi on a montré l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tq $\forall x \in [a,b], f(x) \geq g(x) + \lambda$

- le résultat ne subsiste pas si on omet la condition de continuité
Par ex si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} g(x) = x \text{ si } x \in [0,1[\\ g(1) = 0 \end{cases}$
En effet, supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tq $\forall x \in [0,1], f(x) \geq g(x) + \lambda$
alors $\lim_{x \to 1} f(x) \geq \lim_{x \to 1} g(x) + \lambda$ donc $1 \geq 1 + \lambda$ donc $\lambda \leq 0$ absurde

- le résultat ne subsiste pas si on se place sur $]a,b[$
Par ex si $f : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ et $g : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
Supposons en effet qu'il existe $\lambda > 0$ tq $\forall x \in [0,1[, f(x) \geq g(x) + \lambda$
alors $\lim_{x \to 1^-} f(x) \geq \lim_{x \to 1^-} g(x) + \lambda$ donc $1 \geq 1 + \lambda$ donc $\lambda \leq 0$ absurde

Ex3 TD15

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue tq $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$.

- Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, f est bornée au voisinage de $+\infty$

  choix $\varepsilon = 1$

  càd qu'il existe $A > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^+, x > A \Rightarrow |f(x) - l| \leq 1$

  Ainsi, $\forall x > A, -1+l \leq f(x) \leq 1 + l$

- Par ailleurs, f est continue sur $[0, A]$ qui est un segment donc f est bornée. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in [0,A], m \leq f(x) \leq M$

- Concl : Il existe $m', M' \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}, m' \leq f(x) \leq M'$

  il suffit de prendre par ex $m' = \max(-1+l, m)$ et $M' = \min(1+l, M)$

  et donc f est bornée sur $\mathbb{R}^+$

- f n'atteint pas nécessairement ses bornes

  Par ex $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie en $+\infty$ qui vaut 0. On a $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < e^{-x} \leq 1$

  f n'atteint pas la borne 0.

ex 9
TD15

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f \circ f = id_{\mathbb{R}^+}$

f est bijective et continue sur $[0,+\infty[$.

Comme elle est injective et continue sur $[0,+\infty[$, elle est strictement monotone sur $[0,+\infty[$.

Supposons qu'elle soit strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

alors $\forall x \geq 0, \ x > 0 \Rightarrow f(0) > f(x)$

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ tq $y > f(0)$ alors $\forall x \geq 0, \ y > f(x)$

donc $\forall x \geq 0, \ y \neq f(x)$

Donc y n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}^+$

Ceci contredit le fait que f est surjective de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$

Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) < x$.

Alors $f(f(x)) < f(x)$ donc $f \circ f(x) < f(x) < x$

or $f \circ f(x) = x$ donc $x < f(x) < x$ absurde.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) > x$

alors $f(f(x)) > f(x)$ donc $x > f(x) > x$ absurde.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x$.

Concl : $f = id_{\mathbb{R}^+}$