TD 15 : Continuité sur un intervalle

► Exercice 1 : Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ des applications continues sur un intervalle I et telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. Montrer qu'on a soit $f = g$ soit $f = -g$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus f et g continues ? Si I est un domaine quelconque ? Si f peut s'annuler ?

► Exercice 2 : Soient f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues et telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > g(x)$. Montrer l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x) + \lambda$. Le résultat subsiste-t-il si on omet la condition de continuité ? Si on se place sur $]a,b[$?

► Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. f atteint-elle nécessairement ses bornes ?

► Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et admettant pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f présente un minimum.

► Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 et en 1 et telle que $f(x^2) = f(x)$. Démontrer que f est constante.

► Exercice 6 : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f(x+\dfrac{1}{p}) = f(x)$, où $p \in \mathbb{N}^*$, a au moins une racine.

► Exercice 7 : Trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

► Exercice 8 : Trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$.

► Exercice 9 : Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue vérifiant $f \circ f = Id$. Déterminer f .

► Exercice 10 : Soit f et g deux fonctions continues, définies sur $[0,1]$. On pose, pour tout x réel, $\phi(x) = \sup_{t\in[0,1]}(f(t) + xg(t))$. Démontrer que ϕ est lipschitzienne sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire ?