Exercice 1

① $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & +1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \times (-1)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Donc $P \sim_L I_3$ donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

② $\boxed{R}$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A R A$ puisque $A = I_n A I_n^{-1}$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

$\boxed{S}$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $A R B$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP = P^{-1}(PBP^{-1})P = \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_2} B \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_2}$

donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $B = P^{-1}AP$ associativité du produit matriciel

on pose $Q = P^{-1}$. Q est inversible et $Q^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$

donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $B = QAQ^{-1}$ et BRA.

$\boxed{T}$ $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ARB et BRC alors

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$

donc $A = P(QCQ^{-1})P^{-1} = (PQ)C(Q^{-1}P^{-1})$

Comme $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $PQ \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$

donc $\exists S \in GL_n(\mathbb{K})$ $(S = PQ)$ tq $A = SCS^{-1}$

donc ARC

Concl : R est une <u>relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$</u>

③ Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, n]\!]$

le coeft en i^e ligne & j^e colonne de $A \times B$ est : $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$B \times A$ est : $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $\boxed{D + N = T}$

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$(D+N)^n \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

binôme de Newton avec $DN = ND$

en effet $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = DN$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

or N est nilpotente : $N^2 = 0_{2,2}$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N^2$. Supposons $n \geq 2$

Donc $(D+N)^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}}_{= 0_{2,2}}$

car $\forall k \geq 2$, $N^k = N^2 N^{k-2} = 0_{2,2} N^{k-2} = 0_{2,2}$

Donc $(D+N)^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1}$

$$(D+N)^n = 1 \times I_3 \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(D+N)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, si $n = 0$ et si $n = 1$ la formule reste vraie donc

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(D+N)^n = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T^n}$

(6) Soit $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = P T^n P^{-1}$ "

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

Initialisation : si $n = 0$ alors $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$

donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$A^{n+1} = A^nA \overset{HR}{=} (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) \overset{\text{associativité du produit matriciel}}{=} PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^nI_3TP^{-1}$$
$$= PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1} \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

En effet, d'après (4) $T = P^{-1}AP$ donc $PTP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$

(7) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & n-1 \\ 2\times2^n & 0 & 1 \\ 2\times2^n & 1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n+4+2(n-1) & n & 2^n-3-2n+2 \\ -2^{n+1}+2 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ -2^{n+1}+4+2(n-1) & n & 2^{n+1}-3-2n+2 \end{pmatrix} = PT^nP^{-1}$$

donc
$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -2^n+2+2n & n & 2^n-2n-1 \\ -2^{n+1}+2 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ -2^{n+1}+2+2n & n & 2^{n+1}-2n-1 \end{pmatrix}}$$

(8)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{PDP^{-1} = B}$$

(9) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. on suppose que $M^2 = B$.

$$N^2 = \underline{(P^{-1}MP)}^2 = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = P^{-1}M(PP^{-1})MP = P^{-1}MI_3MP = P^{-1}M^2P$$

or $M^2 = B$ donc $(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}BP$

or $N = P^{-1}MP$ donc $N^2 = P^{-1}BP = P^{-1}(PDP^{-1})P = (P^{-1}P)D(P^{-1}P)$

donc $\underline{N^2 = D}$.

Déterminons $ND = N \times N^2 = N^3 = N^2 \times N = D \times N$ donc $\boxed{ND = DN}$

(9)(a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

$$ND = DN \text{ ssi } \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{cases} 2b = b \\ 3c = c \\ d = 2d \\ 3f = 2f \\ g = 3g \\ 2h = 3h \\ a = a \\ 2e = 2e \\ 3i = 3i \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ a \in \mathbb{R} \\ e \in \mathbb{R} \\ i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$ND = DN$ ssi $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{R}$

ssi <u>N est diagonale</u>

9 b $N = P^{-1}MP$ ssi $PNP^{-1} = M$

et $M^2 = B$ ssi $N^2 = D$ ssi $\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ssi $a^2 = 1$ et $e^2 = 2$ et $i^2 = 3$

ssi $a = \pm 1$ et $e = \pm\sqrt{2}$ et $i = \pm\sqrt{3}$

Il y a donc $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ valeurs pour N :

$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$N_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $N_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, et donc 8 valeurs possibles

pour $M = PN_kP^{-1}$ pour $k \in [\![1,8]\!]$.

<u>Concl : $M^2 = B$ a 8 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$</u> : $\mathcal{S} = \{PN_kP^{-1}$ avec $k \in [\![1,8]\!]\}$

10 <u>$tr(A) = 4 = tr(T)$</u> et T et A sont semblables

<u>$tr(B) = 6 = tr(D)$</u> (2e matrice D) et B et D sont semblables

On peut conjecturer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ont même trace.

11 Posons $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

a Posons $C = A + B = (c_{ij})$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

linéarité de la somme

Donc $tr(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n} (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \underline{tr(A) + tr(B)}$

b Posons $E = \lambda A = (e_{ij})$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_{ij} = \lambda a_{ij}$

linéarité de la somme

donc $tr(E) = \sum_{k=1}^{n} e_{kk} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \underline{\lambda\, tr(A)}$

c Posons $F = A \times B$ et $G = B \times A$. $F = (f_{ij})$ et $G = (g_{ij})$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj}$

donc $tr(A \times B) = tr(F) = \sum_{l=1}^{n} f_{ll} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kl}$

et $tr(B \times A) = tr(G) = \sum_{k=1}^{n} g_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} a_{lk} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kl}$

donc <u>$tr(A \times B) = tr(B \times A)$</u>

(12) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 2 matrices semblables
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$
D'après (11c), $tr(A) = tr(P \times (BP^{-1})) \underset{q\, 11c}{=} tr((BP^{-1}) \times P) = tr(B(P^{-1}P))$

d'où $tr(A) = tr(B \times I_n) = tr(B)$

Exercice 2

① $f(0+0)=f(0)$ et $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ donc $f(0)=2f(0)$ donc $\underline{f(0)=0}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+(-x))=f(0)$ et $f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$ (on prend $y=-x$)

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(0)=0=f(x)+f(-x)$ càd $-f(x)=f(-x)$

Et $\forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$

Donc $\underline{f \text{ est impaire}}$

② • Soit $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: "$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$"

Mq $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie par récurrence

- initialisation : $\mathcal{P}(0)$ vraie car $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(0\times x)=f(0)=0=0\times f(x)$.

- hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$

Soit $x\in\mathbb{R}$ $f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)\underset{HR}{=}nf(x)+f(x)$

donc $f((n+1)x)=(n+1)f(x)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- concl : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie.

• Soit $n\in\mathbb{Z}^*_-$ alors $-n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in\mathbb{R}$

Comme f est paire, $f(nx)=-f((-n)x)\underset{-n\in\mathbb{N}}{=}-(-n)f(x)=nf(x)$.

Ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(nx)=nf(x)}$

③ Soit $q\in\mathbb{N}^*$

$f\left(q\times\frac{1}{q}\right)=f(1)$ et d'après q2 avec $x=1$, $f\left(q\times\frac{1}{q}\right)=q\times f\left(\frac{1}{q}\right)$

Donc $f(1)=q\times f\left(\frac{1}{q}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{q}f(1)$ car $q\in\mathbb{N}^*$

Soit $p\in\mathbb{Z}$.

$f\left(p\times\frac{1}{q}\right)\underset{\substack{p\in\mathbb{Z},\ q2 \\ \text{avec } x=\frac{1}{q}}}{=}p\,f\left(\frac{1}{q}\right)=p\times\frac{1}{q}f(1)=\frac{p}{q}f(1)$

donc $\boxed{\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=rf(1)}$

puisque $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\exists p\in\mathbb{Z}$ et $\exists q\in\mathbb{N}^*$ tq $r=\frac{p}{q}$ et $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)$

④ ⓐ $\underline{\text{Soit } x_0\in\mathbb{R}.}$ Mq f est continue en x_0 càd $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Soit $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)+f(x_0)$

lorsque $x\to x_0$, $x-x_0\to 0$ Or on suppose ici que f est continue en 0 donc $\lim\limits_{X\to 0}f(X)=0$ donc $\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)=0$.

De plus $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=f(x_0)$. Ainsi par somme,

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$ donc f $\underline{\text{est continue en } x_0}$

$\underline{\text{Concl : } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

④ⓑ Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ et (r_n) converge vers x.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(r_n) = r_n \times f(1)$ $(*)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n \times f(1) = x \times f(1)$ d'une part.

D'autre part, f est continue en x et (r_n) converge vers x donc par la caractérisation séquentielle de la limite, $(f(r_n))$ converge vers $f(x)$.
Ainsi on obtient par passage à la limite dans $(*)$:

$f(x) = x f(1)$.

⑤ⓐ Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer l'existence de $\eta > 0$ tq
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x \quad | < \eta \Rightarrow |f(x) - 0| \leq \varepsilon$ puisque $f(0) = 0$

On sait que f est bornée sur un voisinage de 0 donc
$\exists M \geq 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq M$

On distingue 2 cas
- si $\varepsilon \geq M$, alors on choisit $\eta = \alpha$
en effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq M \leq \varepsilon$ donc $|f(x)| \leq \varepsilon$
- si $\varepsilon < M$, alors $\frac{M}{\varepsilon} > 1$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{M}{\varepsilon}$. Il suffit en effet de prendre $n = \lfloor \frac{M}{\varepsilon} \rfloor + 1$

On a alors d'après q 2 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
Remarquons par ailleurs que $n > \frac{M}{\varepsilon}$ ssi $\frac{M}{n} < \varepsilon$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{1}{n}\alpha$ $\quad n > \frac{M}{\varepsilon}$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \eta$ ssi $|x| < \frac{\alpha}{n}$ ssi $|nx| < \alpha$
et alors $|f(nx)| < M$ donc $|nf(x)| < M$ donc $|f(x)| < \frac{M}{n} < \varepsilon$
Donc $|f(x)| = |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ car $f(0) = 0$
Donc f est continue en 0.

(b) on applique la q 4 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x f(1)$.

(6) * Raisonnons par analyse-synthèse pour résoudre l'éq (E)

- analyse : si f est solution de (E) et f continue sur $\mathbb{R}$ alors d'après (4)b, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x f(1)$.
- synthèse : Soit $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? oui

f est-elle solution de (E) ? oui car $\forall x \forall y \quad f(x+y) = a(x+y) = ax + ay$

Donc $\forall x \forall y, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

On a trouvé toutes les fonctions continues qui vérifient (E) : $\underline{\mathcal{S} = \{x \mapsto ax\}}$

* Soit f une fonction qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$

Alors f sol de (E') sur $\mathbb{R}$ ssi $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ssi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} = g(x) + \frac{x^2}{2} + g(y) + \frac{y^2}{2} + xy$

ssi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + \frac{x^2+y^2+2xy}{2} = g(x) + g(y) + \frac{x^2+y^2+2xy}{2}$

ssi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) = g(x) + g(y)$

ssi g est sol de (E) sur $\mathbb{R}$

ssi $\exists a \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = ax$

ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) - \frac{x^2}{2} = ax$

ssi $\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + ax}$

Exercice 3

① ⓐ • $\Gamma \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par définition

• $I_3 \in \Gamma$ car $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$ (on prend $a=1$ et $b=0$)

• $\forall (A,A') \in \Gamma^2$, $A - A' \in \Gamma$

Soit $(A,A') \in \Gamma^2$, il existe $(a,a',b,b') \in \mathbb{R}^4$ tq $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$

on a alors $A - A' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ -b+b' & a-a' \end{pmatrix}$

càd $A - A' = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ -(b-b') & a-a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ -b'' & a'' \end{pmatrix}$ avec $a'' = a-a'$, $b'' = b-b'$

donc $A - A' \in \Gamma$

• $\forall (A,A') \in \Gamma^2$, $A \times A' \in \Gamma$

en gardant les mêmes notations, on a en effet

$$A \times A' = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -(ab'+ba') & aa'-bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''' & b''' \\ -b''' & a''' \end{pmatrix} \text{ avec } a''' = aa'-bb',\ b''' = ab'+ba'$$

donc $A \times A' \in \Gamma$

• De plus en gardant les mêmes notations

$$A' \times A = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -(ab'+ba') & aa'-bb' \end{pmatrix} = A \times A'$$

Donc $\forall (A,A') \in \Gamma^2$, $A \times A' = A' \times A$: $\times$ est commutative

Concl : $(\Gamma, +, \times)$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$

① ⓑ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \{0_{2,2}\}$. Alors $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

$\det(A) = a^2 + b^2 > 0$ puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$

donc A est inversible.

Tout élément non nul de Γ est inversible $\Rightarrow$ $(\Gamma, +, \times)$ est un corps

① ⓒ • $\phi(1 + i0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc $\phi(1) = I_2$

• Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\phi(z+z') = \phi(a+ib+a'+ib') = \phi((a+a') + i(b+b'))$

où l'on a posé $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$

Ainsi $\phi(z+z') = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ -(b+b') & a+a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$

Donc $\phi(z+z') = \phi(z) + \phi(z')$

• En gardant les mêmes notations,

$$\phi(z \times z') = \phi((a+ib)(a'+ib')) = \phi((aa'-bb') + i(ab'+ba'))$$
$$= \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -(ab'+ba') & aa'-bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \phi(z) \times \phi(z')$$

donc ϕ est un morphisme d'anneaux

①ⓓ De plus ϕ est bijective :

- $\forall A \in M$, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \phi(a+ib)$
  donc $\forall A \in M$, $\exists z \in \mathbb{C}$ tq $A = \phi(z)$
  donc ϕ est surjective
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\forall (a',b') \in \mathbb{R}^2$, $\phi(a+ib) = \phi(a'+ib') \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow a = a'$ et $b = b'$
  $\Rightarrow (a,b) = (a',b')$

Donc ϕ est un isomorphisme
Donc M et $\mathbb{C}$ sont isomorphes

②ⓐ Ce sont les nombres de Fermat

$F_0 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3$
$F_1 = 2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5$
$F_2 = 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$

②ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Mq $F_{n+m} \equiv 2\ [F_n]$

on sait que $F_n \equiv 0\ [F_n]$ donc $2^{2^n}+1 \equiv 0\ [F_n]$

donc $2^{2^n} \equiv -1\ [F_n]$.

$F_{n+m} = 2^{2^{n+m}}+1 = 2^{2^n \times 2^m}+1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^m}+1$

or $\left(2^{2^n}\right)^{2^m} \equiv (-1)^{2^m}\ [F_n]$ par compatibilité des congruences avec $\times$ et 2^m est pair donc $(-1)^{2^m} = 1$

Ainsi $\left(2^{2^n}\right)^{2^m} \equiv 1\ [F_n]$ donc $\left(2^{2^n}\right)^{2^m}+1 \equiv 2\ [F_n]$
par compatibilité des congruences avec $+$.
et $F_{n+m} \equiv 2\ [F_n]$

②ⓒ Soit d un diviseur commun à F_n et à F_{n+m}.

Comme $F_{n+m} \equiv 2\ [F_n]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $F_{n+m} = 2 + kF_n$

donc $2 = F_{n+m} - kF_n$

d / F_n et d / F_{n+m} donc $d / F_{n+m} - kF_n$ donc $d / 2$
donc $d = 1$ ou $d = 2$

Or les nombres de Fermat sont impairs donc $d = 1$

L'ensemble des diviseurs communs à F_n et F_{n+m} est $\{1\}$

Donc $F_n \wedge F_{n+m} = 1$ et F_n et F_{n+m} sont premiers entre eux

③ⓐ ϕ est l'indicatrice d'Euler

$\phi(8) = 4$ car 1, 3, 5 et 7 sont les seuls nombres de $[\![1,8]\!]$ premiers avec 8

$\phi(11) = 10$ car 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 sont premiers avec 11

$\phi(5^2) = 20$ car seuls 5, 10, 15 ; 20 et 25 ne sont pas premiers avec 25 parmi les nombres entiers entre 1 et 25.
car $\mathcal{D}(25) = \{1, 5, 25\}$

(b) Soit $p \in \mathcal{P}$

p est premier avec tous les nombres qu'il ne divise pas

Tout nombre entier non nul positif inférieur strictement à p n'est pas divisible par p

donc $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $k \wedge p = 1$ donc $\boxed{\phi(p) = p-1}$

(c) Soit $p \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Les nombres compris entre 1 et p^α qui ne sont pas premiers avec p^α sont les multiples de p. Ils s'écrivent kp avec $k \in [\![1, p^{\alpha-1}]\!]$ et sont au nombre de $p^{\alpha-1}$

Tous les autres nombres compris entre 1 et p^α sont premiers avec p^α

Ainsi $\boxed{\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}}$

(d) la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit :

$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N, \exists (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{P}^N$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$

$(p_1 < p_2 < \dots < p_N)$.

on a : $\phi(n) = \phi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \phi(p_N^{\alpha_N})$ d'après q (d)

$$= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdots (p_N^{\alpha_N} - p_N^{\alpha_N - 1}) \text{ d'après q (c)}$$

$$= p_1^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots p_N^{\alpha_N}\left(1 - \frac{1}{p_N}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} \times \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \boxed{n \times \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. n admet un inverse modulo 99 ssi $n \wedge 99 = 1$

Donc le nombre recherché est $\phi(99)$

$99 = 3^2 \times 11$ donc $\phi(99) = 99 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 99 \times \frac{2}{3} \times \frac{10}{11} = 60$

60 nombres ont un inverse modulo 99