Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : matrices semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Préliminaires

1. Pour tout cet exercice on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :
$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \ A\mathcal{R}B \text{ si et seulement si } A \text{ est semblable à } B.$$
Montrer que R est une relation d'équivalence.
3. Si A, B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner le coefficient en $i$ème ligne et $j$ème colonne de la matrice $A \times B$ et de la matrice $B \times A$.

Un exemple de matrice semblable à une matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche dans cette partie à déterminer la puissance $n$ième de A pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = PT^nP^{-1}$.
7. En déduire A^n en fonction de n.

Un exemple de matrice semblable à une matrice diagonale

Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche dans cette partie à résoudre l'équation $M^2 = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

8. Vérifier que $B = PD'P^{-1}$.
9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une solution de l'équation $M^2 = B$. Déterminer $\left(P^{-1}MP\right)^2$. En déduire que $N = P^{-1}MP$ commute avec D'.

9.a. Montrer que toute matrice qui commute avec D' est nécessairement diagonale. On posera pour cela $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et on résoudra l'équation $ND' = D'N$.

9.b. Conclure en précisant la forme de M et le nombre de solutions de l'équation $M^2 = B$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les solutions ne sont pas demandées.

Une condition nécessaire pour que deux matrices soient semblables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de M et on note $tr(M)$ le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{kk}$.

10. Donner la trace des matrices A, B, T et D' définies dans les parties précédentes. Que peut on conjecturer à partir de ces exemples de la trace de deux matrices semblables ?
11. A et B désignent maintenant deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel. Démontrer que
    11.a. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
    11.b. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
    11.c. $tr(AB) = tr(BA)$.
12. Démontrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace.

Exercice 2 : équation fonctionnelle

On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E) \ : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout x réel, $f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
4. On suppose pour cette question seulement que f est continue en 0.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. On suppose pour cette question que f est bornée sur un voisinage de 0.
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des fonctions continues définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(E') \ : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

   On cherchera f sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2}$ et on utilisera les résultats précédents.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $\Gamma = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\}$.
   (a) Montrer que $(\Gamma, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.
   (b) Déterminer les éléments inversibles de Γ pour la loi $\times$. Que peut-on en déduire ?
   (c) Soit ϕ l'application définie de $\mathbb{C}$ vers Γ telle que $\phi \ : \ a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Montrer que ϕ est un morphisme d'anneaux.
   (d) En déduire que Γ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.
2. Pour tout entier naturel n on note $F_n = 2^{2^n} + 1$.
   (a) Quel est le nom de ces nombres F_n ? Donner F_0, F_1 et F_2.
   (b) Etablir que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $F_{n+m} \equiv 2[F_n]$.
   (c) En déduire, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'ensemble des diviseurs communs à F_n et F_{n+m} puis leur pgcd.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs à n qui sont premiers avec n.
   (a) Quel est le nom de la fonction ϕ ? Donner $\phi(8)$, $\phi(11)$, $\phi(5^2)$.
   (b) Calculer $\phi(p)$ lorsque p est premier.
   (c) Montrer que $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ lorsque p est premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   (d) On admet que si m et n sont premiers entre eux alors $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$. Exprimer $\phi(n)$ selon la décomposition en facteurs premiers de n.
   (e) Application : déterminer le nombre d'entiers naturels qui ont un inverse modulo 99.