Chapitre 17 : Dérivation des fonctions

1 Dérivée en un point, fonction dérivée

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ (a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in]a, b[$.
Soit $t\ :\ ]a, b[\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Théorème 1.

Dans le contexte précédent, les énoncés suivants sont équivalents :

1. *Le taux d'accroissement t de la fonction f en x_0 admet une limite finie a' quand x tend vers x_0 :* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a'$.
2. *Pour tout x appartenant à $]a, b[$, on peut écrire $f(x) = f(x_0) + a'(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$ avec $lim_{x \to x_0}\epsilon(x - x_0) = 0$.*

Définition 1 (Dérivabilité en un point).

*f est **dérivable** en x_0 ssi t possède une limite **finie** en x_0 et alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ est appelé nombre dérivé de } f \text{ en } x_0$$

L'écriture $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$ avec $lim_{x \to x_0}\epsilon(x - x_0) = 0$ est appelée développement limité à l'ordre 1 de f au point x_0.

► Exemple : fonction inverse en $x_0 \neq 0$.

Définition 2 (Dérivabilité à droite, à gauche en un point).

*Si f est définie sur $]a, x_0]$, f est **dérivable à gauche** en x_0 ssi t possède une limite **finie** en x_0^- et alors*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \text{ est appelé nombre dérivé de } f \text{ à gauche en } x_0$$

*Si f est définie sur $[x_0, b[$, f est **dérivable à droite** en x_0 ssi t possède une limite **finie** en x_0^+ et alors*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \text{ est appelé nombre dérivé de } f \text{ à droite en } x_0$$

Propriété 1.

Si $x_0 \in]a, b[$, f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

► Exemple : $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Propriété 2.

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

$$\text{dérivabilité} \Rightarrow \text{continuité}$$

La réciproque est fausse !

► Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \neq 0,\ f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. f est continue sur $\mathbb{R}$ alors que f n'est pas dérivable en 0. En effet, $t\ :\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.
► Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^{\frac{1}{3}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ alors que g n"est pas dérivable en 0. En effet, $t\ :\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{\frac{-2}{3}}$ n'admet pas de limite finie en 0.

1.2 Interprétation géométrique et cinématique

Tangente à une courbe

Le nombre $t(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite passant par $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. Lorsque $x \to x_0$, le point M tend vers M_0 et la droite (M_0M) tend vers la droite tangente à la courbe au point M_0.

Equation de (M_0M) :

$$Y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(X - x_0).$$

Si $x \to x_0$, la droite (M_0M) tend vers la droite d'équation :

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

C'est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
Cas particuliers :
Si f est dérivable à gauche alors la courbe admet une demi-tangente à gauche au point M_0 d'équation $Y - f(x_0) = f'_g(x_0)(X - x_0)$.
Si f est dérivable à droite alors la courbe admet une demi-tangente à droite au point M_0 d'équation $Y - f(x_0) = f'_d(x_0)(X - x_0)$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors la courbe admet en M_0 une **tangente verticale**.
► Exemple : $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$. Noter qu'il y a changement de concavité.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, la courbe admet une demi-tangente verticale à droite et à gauche en M_0.
► Exemple : $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ et $x \mapsto \sqrt{|x|}$. Dans les deux cas, on dit que M_0 est un **point de rebroussement vertical**.

Vitesse instantanée Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq t_0$ le taux d'accroissement $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ représente la **vitesse moyenne** entre les instants t et t_0 et sa limite $f'(t_0)$ représente la **vitesse instantanée** à l'instant t_0.
En cinétique chimique, la dérivée de la concentration d'un produit s'appelle vitesse d'apparition de ce produit. Lorsque f représente l'évolution de la charge d'une armature de condensateur, sa dérivée représente l'intensité du courant de charge ou de décharge du condensateur.

1.3 Fonction dérivée

Soit $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Définition 3 (Fonction dérivée).

*f est **dérivable sur** $]a,b[$ ssi f est dérivable en tout point de $]a,b[$. On appelle fonction dérivée de f et on note $f'\ :]a,b[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$.*

Notation : f' est aussi notée Df ou $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dot{f}$.

Définition 4.

f est dérivable sur $[a,b]$ ssi
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*
- *f est dérivable à droite en a,*
- *f est dérivable à gauche en b.*

Attention ! (f dérivable sur $[a,b]$ et f dérivable sur $[b,c]$) $\not\Rightarrow$ f dérivable sur $[a,c]$. Il faut en plus que $f'_g(b) = f'_d(b)$.
► Exemple : $|.|$ est dérivable sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

1.4 Opérations sur les fonctions à valeurs réelles dérivables

On note $\mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.

Soient f et g dérivables sur $]a,b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f+g$, αf et fg sont dérivables sur $]a,b[$.

Remarque 1. $\mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$.
$1 \in \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$.
$(\mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}),+,\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R}),+,\times)$.
Pour plus tard : $(\mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}),+,.)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R}),+,.)$. $D\ :\ \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(]a,b[,\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ *est une application linéaire.*

▶ Exemple : $x \mapsto x$ est dérivable sur $]a,b[$.

Propriété 3.

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriété 4.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall f \in \mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R}),\ (f^n)' = nf^{n-1}f'$.

Démonstration : par récurrence.

1.5 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 3.

Soit $f\ :\ I \to J,\ g\ :\ J \to \mathbb{R}$, *avec* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *Si* f *est dérivable en* $x_0 \in I$ *et* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Application : soit f dérivable en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et de plus $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

En effet, $\frac{1}{f}$ est composée de f et de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Conséquence : si f et g sont dérivables en x_0 et $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{(f'g - fg')(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Propriété 5.

Les fractions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

1.6 Réciproque d'une fonction dérivable bijective

Théorème 4.

Soit $f\ :\ ]a,b[\to f(]a,b[)$ *une fonction bijective et continue sur* $]a,b[$. *Si* f *est dérivable en* $x_0 \in]a,b[$ *telle que* $f'(x_0) \neq 0$, *alors* f^{-1} *est dérivable en* $f(x_0)$ *et*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Remarque 2. *Si* $f'(x_0) = 0$ *alors* $|\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}| \to_{y \to y_0} +\infty$.
Si $|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}| \to_{x \to x_0} +\infty$ *alors* $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Interprétation géométrique : La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation : $Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$.
La tangente à $\mathcal{C}_f^{-1}$ au point de coordonnées (y_0, x_0) a pour équation :
$Y - x_0 = \dfrac{1}{f'(x_0)}(X - y_0)$ ssi $X - y_0 = f'(x_0)(Y - x_0)$.
Ces deux tangentes sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice.

1.7 Exemples usuels

Les fonctions circulaires sont dérivables sur leur domaine de définition.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin' x = \cos x$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos' x = -\sin x$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \tan' x = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$.
Fonctions circulaires réciproques :
Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$, et pour tout $x \in]1, 1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ et } \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

De plus, en 1 et en -1, les graphes de arcsin et de arccos présentent une tangente verticale.
La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Fonctions logarithme et exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp x$.
Fonctions puissances : $\forall a \in R$, la fonction $f_a\ :\ \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_a{}'(x) = a x^{a-1}$$

Fonctions hyperboliques : elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{ch}' = \text{sh et sh}' = \text{ch et th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}$$

1.8 Fonctions n fois dérivables

Si f' est continue sur $]a, b[$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
Si f' est dérivable sur $]a, b[$ on note $f'' = (f')'$.
Si f'' est continue sur $]a, b[$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$.
etc... Si $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a, b[$ on note $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
On pose $f^{(0)} = f$.

Notation : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}$ est aussi notée $D^k f$ ou $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.

Remarque 3. *La dérivée seconde en* t_0 *s'interpréte en cinématique comme accélération instantanée à l'instant* t_0.

Définition 5.
On dit que f *est* ***indéfiniment dérivable sur*** $]a, b[$ *lorsque* $\forall n \in \mathbb{N}$, f *est* n *fois dérivable.*

Propriété 6.

Etant données deux fonctions f et g définies et n fois dérivables sur $]a, b[$ et λ et μ deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur $]a, b[$.

Propriété 7 (Formule de Leibniz).

Si f et g sont n fois dérivables sur $]a, b[$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors fg l'est aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration : par récurrence.

Remarque 4. *fg peut être dérivable sans que ni f ni g le soient. Voir exemple ci-dessous.*

► Exemple : $f\ :\ x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ n'est pas dérivable en 0 alors que $g\ :\ x \mapsto (f(x))^2$ l'est $((g)'(0) = 0)$.

Définition 6 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$).

*f est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b[$ et on note $f \in \mathcal{C}^k(]a, b[, \mathbb{R})$ ssi*
- *f est k fois dérivable sur $]a, b[$,*
- *$f^{(k)}$ est continue.*

*f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$.*

Remarque 5. *Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ est continue.*

► Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \neq 0,\ f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$ et $f(0) = 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée n'est pas continue en 0.

Propriété 8.

$\mathcal{C}^n(]a, b[, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$.
Soit $f\ :\ I \to J$, $g\ :\ J \to \mathbb{R}$, avec I et J deux intervales de $\mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si g est $\mathcal{C}^n$ sur J alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^n$ sur I.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Soit $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^n(I)$ une application bijective de I sur $f(I) = J$ telle que sa dérivée ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

2 Etude globale des fonctions dérivables

2.1 Extrema d'une fonction dérivable

Théorème 5.

Soient $f\ :\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$ tels que f est dérivable en x_0. Si x_0 est un extremum pour f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 6. *Un zéro de la dérivée est appelé **point critique**.*
La réciproque est fausse (condition nécessaire pas une condition suffisante) : par exemple $f\ :\ x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum de f.
f peut avoir un extremum sans être dérivable : par exemple $f\ :\ x \mapsto |x|$, 0 est un minimum et $f'(0)$ n'existe pas.
Attention $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$: par exemple $f\ :\ x \mapsto x^3$ sur $[0, 1]$ admet un maximum en 1 et pour autant $f'(1) \neq 0$.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 6 (Théorème de Rolle).

Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[,\ f'(c)=0$.

Remarque 7. *Chaque hypothèse est nécessaire :*
▶ *Exemple : $f\ :\ x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1,1]$ et $\forall c \in]-1,1[\setminus\{0\},\ f'(c) \neq 0$ (ici (1) et (3) sont vérifiées, pas (2)).*
▶ *Exemple : $f\ :\ x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$ et $\forall c \in]0,1[,\ f'(c) \neq 0$ (ici (1) et (2) sont vérifiées, pas (3)).*

Interprétation cinématique : le théorème de Rolle permet d'affirmer que la vitesse instantanée d'un mobile qui se déplace sur un axe et qui repasse par son point de départ s'est annulée.

2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 7 (Egalité ou formule des accroissements finis).

Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[,\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Démonstration : on "redresse la courbe" en posant $\forall x \in [a,b],\ g(x)=f(x)+kx$ avec k tel que $g(a)=g(b)$. On applique ensuite le théorème de Rolle.

Remarque 8. *Si $f(a)=f(b)$, on retrouve le théorème de Rolle.*
Autre écriture : si $b=a+h$ avec $h>0$. L'égalité des accroissements finis devient : si f est continue sur $[a,a+h]$, dérivable sur $]a,a+h[$ alors $\exists \theta \in]0,1[,\ f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$.

Interprétation cinématique : le théorème des accroissements finis montre que la vitesse moyenne sur un parcours rectiligne dans un intervalle de temps $[t_1,t_2]$ est atteinte par la vitesse instantanée.

Propriété 9 (Inégalité des accroissements finis).

Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Si $sup_{c\in]a,b[}|f'(c)| = k \in \mathbb{R}^+$ alors $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$.
Autre formulation : Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'| \leq k$ alors f est k-lipschitzienne.
Autre formulation encore : Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$.
Si $m \leq f' \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

2.4 Application

2.4.1 Etude des variations d'une fonction

Soit f continue sur $]a,b[$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. Si $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ alors f est croissante sur $[a,b]$.
2. Si $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ alors f est décroissante sur $[a,b]$.
3. Si $f' = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.
4. Si $f' > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.
5. Si $f' < 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.
6. Si $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.
7. Si $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ et ne s'annule éventuellement qu'en des points isolés alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

Remarque 9. *Résultat faux si on ne se place pas sur un intervalle de $\mathbb{R}$: par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$. Le résultat reste vrai si on remplace f continue sur $[a,b]$ par f est continue sur $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.*

► Exemple : deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées sont égales sur I diffèrent d'une constante (conséquence du troisième point).

2.4.2 Condition de dérivabilité en un point

Théorème 8 (Théorème de la limite de la dérivée).

Soit a un élément de I, intervalle de $\mathbb{R}$. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable en a, on a $f'(a) = l$ et donc f' est continue en a.

Remarque 10. *La réciproque est fausse : $f'(a)$ peut exister sans que $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe. Par exemple, soit $f : x \mapsto x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et telle que $f(0) = 0$. f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $f'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$. Mais $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ et f' n'a pas de limite en 0^+ !*

► Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{-x-1}$ si $x \leq -1$ et par $f(x) = x^2 - 1$ si $x > -1$. f est-elle dérivable en -1 ?

Propriété 10.

Soit a un élément de I. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' tend vers $+\infty$ en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$.

Remarque 11. *Pour prouver que la courbe représentative de f (fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$) possède une tangente au point d'abscisse a, il suffit de démontrer que la restriction à $I \setminus \{a\}$ de sa dérivée possède une limite en a. Si celle limite est un réel m alors la tangente a pour pente m. Si cette limite est infinie, la tangente est parallèle à (Oy).*

► Exemple : Etude de la dérivabilité en 0 de $x \mapsto \arcsin(1-x^4)$, de $x \mapsto \arcsin(1-x^2)$.

Remarque 12. *Soit f continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.*
Si f' a une limite finie en a alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

► Exemple : $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

2.4.3 Etude des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction à valeurs réelles.

1. Justifier l'existence de la suite : trouver pour cela un intervalle I de $\mathbb{R}$ stable par f ($f(I) \subset I$) contenant le premier terme de la suite.
2. Recherche de la limite éventuelle : si I est un intervalle fermé (du type $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$) et si f est continue sur I alors si u converge, sa limite appartient à I et vérifie $l = f(l)$. Conséquence : si l'équation $x = f(x)$ n'a aucune solution alors la suite est divergente.
3. Montrer que u converge
   (a) Montrer qu'elle est croissante majorée ou décroissante minorée. Pour cela, utiliser le fait que si f est croissante, alors u est monotone. Autre méthode : si $f(x) - x$ garde un signe constant alors la suite est monotone.
   (b) Si f est décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposés et il s'agit de montrer qu'elles ont la même limite. Lorsque la fonction n'est pas monotone, on peut essayer de trouver des intervalles stables sur lesquels la fonction est monotone.
   (c) Majoration directe de $|f(u_n) - l|$:

Propriété 11.

Soient $\ell \in \mathbb{R},\ f(\ell) = \ell$ et I un intervalle stable par f contenant u_0. Si l'intervalle I contient l et s'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que

$$\forall x \in I,\ |f(x) - l| \leq k|x - l|,$$

alors la suite converge vers l.

Propriété 12.

S'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que f soit lipschitzienne sur I et si $l \in I$ est tel que $l = f(l)$ alors la suite converge vers l.

Propriété 13.

Si f est dérivable sur I et si sa dérivée est bornée sur I par un réel $k \in [0,1[$ et si $l \in I$ est tel que $l = f(l)$ alors la suite converge vers l.

► Exemple : Etudier le comportement de la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}\cos u_n$.

3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

3.1 Dérivée en un point

Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$.

Soit $t\ :\ I \setminus \{a\} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Définition 7 (Dérivabilité en un point).

*f est **dérivable** en a ssi t possède une limite **finie** en a et alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ est appelé nombre dérivé de } f \text{ en } a$$

$f'(a)$ est aussi noté $Df(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Propriété 14.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si Ref et Imf sont dérivables en a et on a alors :

$$f'(a) = (Ref)'(a) + i(Imf)'(a).$$

► Exemples :
— Si f est dérivable en a alors $\bar{f}$ aussi et $(\bar{f})'(a) = \bar{f'}(a)$.
— Si f est dérivable en a alors e^f est dérivable en a et $(e^f)'(a) = f'(a)e^{f(a)}$.

Propriété 15.

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Propriété 16 (Opérations sur les fonctions dérivables).

Soient f et g deux fonctions complexes définies sur I et dérivables en $a \in I$, ainsi que λ et μ deux complexes.

1. *La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.*
2. *La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$, définie au voisinage de a, est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.*

Démonstration : pour le dernier point, écrire $\dfrac{f}{g} = f\bar{g}\dfrac{1}{g\bar{g}}$.

Propriété 17 (Dérivée d'une composée).

Soit $\phi : I \to J$, $f : J \to \mathbb{C}$, avec I et J deux intervales de $\mathbb{R}$. Si ϕ est dérivable en $a \in I$ et f est dérivable en $\phi(a) = b$ alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a) \times f'(b) = \phi'(a)f'(\phi(a)).$$

Démonstration : on a $\mathrm{Re}(f \circ \phi) = \mathrm{Re}(f) \circ \phi$ et $\mathrm{Im}(f \circ \phi) = \mathrm{Im}(f) \circ \phi$.

3.2 Fonction dérivée

f est **dérivable sur** I ssi f est dérivable en tout point de I. On appelle **fonction dérivée de** f et on note $f' : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto f'(x)$.
f' est aussi notée Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

$$\boxed{\text{On note } \mathcal{D}(I, \mathbb{C}) \text{ l'ensemble des fonctions dérivables sur } I \text{ à valeurs dans } \mathbb{C}.}$$

Propriété 18.

Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

Théorème 9.

$(\mathcal{D}(I, \mathbb{C}), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(I, \mathbb{C}), +, .)$.
$(\mathcal{D}(I, \mathbb{C}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{C}(I, \mathbb{C}), +, \times)$.

Démonstration : $\mathcal{D}(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. $1 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Soient f et g dérivables sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, αf et fg sont dérivables sur I.
$D : \mathcal{D}(I, \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(I, \mathbb{C}),\ f \mapsto f'$ est une application linéaire.

Propriété 19.

Toute fonction polynomiale à coefficients compexes est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$P\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *(avec $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ des nombres complexes) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée :* $P'\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Propriété 20.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C}),\ (f^n)' = n f^{n-1} f'$.

Propriété 21.

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Propriété 22.

Les fractions rationnelles à coefficients complexes sont dérivables sur leur ensemble de définition.

3.3 Fonctions n fois dérivables

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence pour $k \geq 1$ la fonction dérivée k^{ieme} de f sur I ainsi : $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.
$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}$ est aussi notée $D^k f$ ou $\frac{d^k f}{dx^k}$.

On dit que f est **indéfiniment dérivable sur** I lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ f$ est n fois dérivable.

Propriété 23.

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ admet une dérivée n^{ieme} sur I ssi ses parties réelle et imaginaire admettent une dérivée n^{ieme} sur I et $Re(f^{(n)}) = (Re(f))^{(n)}$ et de même $Im(f^{(n)}) = (Im(f))^{(n)}$.

Propriété 24.

Etant données f et g deux fonctions complexes n fois dérivables sur I et λ et μ deux complexes. $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

► Exemple : Si a est un nombre complexe non réel, calculer la dérivée n^{ieme} de $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x-a}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété 25 (Formule de Leibniz).

Si deux fonctions complexes f et g sont n fois dérivables sur I (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors fg l'est aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

3.4 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 8 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$).

*$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^{\|}(I, \mathbb{C})$ ssi*
- *f est k fois dérivable sur I,*
- *$f^{(k)}$ est continue.*

*f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^\backslash$ sur I.*

Propriété 26.

$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
Un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

▶ Exemple : Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur I. $|f|\ :\ x \mapsto \sqrt{f(x)\bar{f}(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. $\dfrac{f}{|f|}$ aussi.

3.5 Le théorème de Rolle ne s'étend pas !

Le théorème de Rolle n'est pas généralisable aux fonctions complexes. Prendre par exemple la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(t) = e^{it}$. $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant f' ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$ $(\forall t \in [0, 2\pi],'_f(t) = ie^{it}$.
Interprétation cinématique : une fonction complexe peut représenter un mouvement ponctuel dans le plan euclidien identifié à $\mathbb{C}$. Sa dérivée est alors le vecteur vitesse. Contrairement à ce qui se passe pour un mouvement rectiligne, le mobile peut revenir à son point de départ sans pour autant que sa vitesse s'annule.
L'égalité des accroissements finis, qui découle du théorème de Rolle, n'est pas généralisable non plus aux fonctions complexes.

3.6 Inégalité des accroissements finis

Propriété 27 (Inégalité des accroissements finis).

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b]$. Si $sup_{c\in[a,b]}|f'(c)| = k \in \mathbb{R}^+$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

Démonstration : attendre le cours sur l'intégration pour la comprendre dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: si $a \leq b$, comme f' est continue, on a : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$. Donc $|f(b) - f(a)| = |\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t| \leq \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \displaystyle\int_a^b k\mathrm{d}t = k(b - a)$.
Interprétation cinématique : si la vitesse instantanée d'un mobile est, entre les instants t_1 et t_2, inférieure en norme à k, alors le mobile parcourt une distance d'au moins $k(t_2 - t_1)$.

3.7 Caractérisation des fonctions constantes

Propriété 28 (Caractérisation des fonctions constantes).

Soient I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$. La fonction f est constante ssi $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.