TD17

ex 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable au point a.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$g(x) = \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \frac{x\,(f(a)-f(x)) + xf(x) - af(x)}{x-a}$$

$$g(x) = x\,\frac{f(a)-f(x)}{x-a} + f(x)\,\frac{x-a}{x-a} = -x\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(x)$$

Comme f est dérivable en a, f est continue en a et

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -a f'(a) + f(a)$$

Donc g admet une limite finie en a et cette limite vaut $-af'(a) + f(a)$

La réciproque est fausse. Prendre par ex $f : x \mapsto |x|$ avec $a = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $g(x) = \dfrac{x|0| - 0|x|}{x-0} = \dfrac{0}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

alors que f n'est pas dérivable en 0.

TD17 ex 10 Soit $n \geq 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$ par linéarité de la somme.

en effet, f est dérivable en 0 donc il existe une fonction $\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0 tq $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = x f'(0) + x\,\varepsilon(x)$.

et ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ on a donc :

$$S_n = \frac{f'(0)}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} f'(0) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Mq $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$ existe et vaut 0.

On sait que $\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et que $\varepsilon(0) = 0$

donc $\forall \alpha > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in [-1,1], \ |x| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| \leq \alpha$

on prend $n \geq N = \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor + 1$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \eta \Rightarrow \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \alpha$

Ainsi $\forall \alpha > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \alpha$

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = 0$. D'autre part $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

donc $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$