Exercice 1

Pour aborder cet exercice, commencer par revoir la méthode 11.7 et son exemple et par faire l'exerice 11.7 du livre jaune.
On considère la fonction numérique f de la variable x définie pour tout x différent de 1 par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}e^x.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \qquad (1)$$

   On exprimera $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et de $P'_n(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.
3. Calculer P_0, P_1 et P_2.

4. Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n.

5. Montrer que pour tout x différent de 1, on a

$$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0. \qquad (2)$$

6. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on a :

$$P_{n+1}(x) = (n+2-x)\,P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x). \qquad (3)$$

7. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la relation $P'_n = -nP_{n-1}$.

Exercice 2

Pour aborder cet exercice, commencer par revoir la méthode 14.7 et son exemple et par faire l'exerice 14.14 du livre jaune.
Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire A^n en fonction de n.
4. On considère trois suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 2b_n - 2c_n \\ b_{n+1} = a_n - c_n \\ c_{n+1} = 3a_n - 2b_n - c_n \end{cases}$$

   et on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ et en déduire l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 3

Pour cet exercice, commencer par s'échauffer en travaillant l'exercice 26.6a du livre orange.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$ soit inversible. Dans le cas où A ne l'est pas, donner une matrice X telle que $AX = 0_{3,1}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 2\lambda + 1 & 3 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$ soit inversible. Dans le cas où B ne l'est pas, donner une matrice X telle que $BX = 0_{3,1}$.