Semaine du 24/02

Chapitre 16 : Matrices : en exercices

Ensembles de matrices Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire, produit matriciel (bilinéarité, associativité). Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. Transposée d'une matrice. Notation A^T. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Systèmes linéaires Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé. Système compatible. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A. Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X0 + Y$, où $X0$ est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Interprétation matricielle des opérations élémentaires Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices de transvection, de permutation et de dilation. Inversibilité de ces matrices. Traduction matricielle de l'algrithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$. Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Anneau des matrice carrées Anneau $M_n(\mathbb{K})$. Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents. Matrice identité, matrice scalaire. Notation I_n . Matrices symétriques, antisymétriques. Notations $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$. Formule du binôme. Application au calcul de puissances. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires.

Matrices carrées inversibles Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Notation $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'une transposée. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$. Toute technicité est exclue. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire. Cas particulier des matrices diagonales.

Chapitre 17 : Dérivation

Dérivée en un point, fonction dérivée : dérivabilité en un point, nombre dérivé. Définition par le taux d'accroissement. Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Interprétation cinématique de la notion de dérivabilité en un point. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle, fonction dérivée. Opération sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Tangente au graphe d'une réciproque.

Extremum local et point critique Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. Un point critique est un zéro de la dérivée. **Théorème de Rolle et des accroissements finis** Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Interprétation graphique et cinématique de ces résultats. Inégalités des accroissements finis : : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne. Application au suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers l (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers l lorsque x tend vers a. Interprétation géométrique. Si l est un nombre réel alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz, quotient, composition, réciproque.

Question de cours avec démonstration :

1. $\diamond\diamond$ La dérivabilité entraine la continuité (propriété 2).
2. $\diamond\diamond$ Soient f et g dérivables sur $]a, b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, αf et fg sont dérivables sur $]a, b[$ (théorème 2).

3. Dérivabilité de la bijection réciproque et tangente au graphe d'une réciproque (théorème 4 et interprétation géométrique qui suit).
4. ⋄ Théorème de Rolle avec interprétation graphique et cinématique (théorème 6).
5. Egalité des accroissements finis avec interprétation graphique et cinématique (théorème 7).
6. Formule de Leibniz (propriété 7).

Les élèves ⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux ⋄ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves ⋄⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux ⋄ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

— dérivabilité de la fonction sinus en $x_0 \neq 0$ (sous Déf 1),
— $f \ : \ x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ n'est pas dérivable en 0 alors que $g \ : \ x \mapsto (f(x))^2$ l'est $((g)'(0) = 0)$ (sous rq5)
— étude de la dérivabilité en 0 de $x \mapsto arcsin(1 - x^4)$ (sous rq 11), théorème de la limite de la dérivée

Merci de proposer aux élèves ⊕ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours (par exemple une ou deux dérivées usuelles) et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à étudier la dérivabilité d'une fonction en un point par la limite du taux d'acccroissement ou par le théorème de la limite de la dérivée. Les exercices porteront ensuite sur la recherche d'une dérivée $n$ième, sur les variations d'une fonction, sur la dérivée de la bijection réciproque, sur le théorème de Rolle, sur l'application du théorème des accroissements finis à l'étude de suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, sur des exercices sur le calcul matriciel (binôme de Newton, inversibilité d'une matrice avec paramètre, matrices symétriques et antisymétriques).
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj ⊕
Postel Esteban ⋄

G3 Boulard Louna (LV2) ⋄⋄
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo ⋄⋄
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) ⊕

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla ⋄

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre ⋄
Simon Robert ⋄⋄
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed ⋄
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys ⋄

G15 Canon Asybiade ⋄
Loudahi Abraham
Ramzi Sara ⊕

G16 : Moussaïd Soufiane ⊕
Watel Aurélien ⋄
Le Gociv Edenn