TD16 cor

ex3 $\Rightarrow$ supposons $A-I_m$ et $B-I_m$ inversibles

Calculons $(A-I_m)(B-I_m)$

$(A-I_m)(B-I_m) = AB - AI_m - I_mB + I_m^2 = AB - A - B + I_m$

Comme $A+B = AB$ alors $AB - A - B = O_m$

donc $(A-I_m)(B-I_m) = I_m$ donc $(B-I_m)$ est l'inverse

de $(A-I_m)$ et donc $(B-I_m)(A-I_m) = I_m$

càd $BA - BI_m - I_mA + I_m^2 = I_m$

d'où $BA - B - A + I_m = I_m$ càd $BA = B + A = A+B$

or $AB = A+B$ donc $AB = BA$.

$\Leftarrow$ Supposons que $AB = BA$

Alors $(A-I_m)(B-I_m) = AB - A - B + I_m$

or $AB = A+B$ donc $(A-I_m)(B-I_m) = I_m$

De même $(B-I_m)(A-I_m) = BA - B - A + I_m$

or $AB = BA$ donc $(B-I_m)(A-I_m) = AB - B - A + I_m = I_m$

Donc $(A-I_m)$ est inversible d'inverse $(B-I_m)$

et $(B-I_m)$ ——————————— $(A-I_m)$

TD16 cor

exc 4 • $(AB-BA)^T = (AB)^T - (BA)^T$ (la transposition est linéaire)

$$= B^T A^T - A^T B^T$$

$$= (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -(AB-BA)$$

donc $AB-BA$ est une matrice antisymétrique

• $$\left((AB-BA)^2\right)^T = (AB-BA)^T (AB-BA)^T$$

$$= \left(-(AB-BA)\right)\left(-(AB-BA)\right)$$

$$= (AB-BA)^2$$

donc $(AB-BA)^2$ est une matrice symétrique