Ex 1

1) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$:

- $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle
- exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x>1$, $f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$ "

- initialisation :

Soit $x>1$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} e^x$

et donc $f^{(0)}(x) = \frac{P_0(x) e^x}{1-x}$ avec $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$

ainsi $\forall x>1$, $P_0(x) = 1$

donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

- hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n fixé

Mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Soit $x>0$. $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime}(x) \overset{HR}{=} \frac{\left(e^x P_n(x) + e^x P_n'(x)\right)(1-x)^{n+1} + (n+1)(1-x)^n e^x P_n(x)}{\left((1-x)^{n+1}\right)^2}$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x (1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} \left((1-x)\left(P_n(x) + P_n'(x)\right) + (n+1) P_n(x) \right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+2}} \left(\underbrace{(n+2-x) P_n(x) + (1-x) P_n'(x)}_{P_{n+1}(x)} \right),$$

où $P_n \in \mathbb{R}[X]$

Ainsi il existe $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x) e^x}{(1-x)^{n+2}}$:

$P_{n+1} = (n+2-X) P_n + (1-X) P_n'$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

3) $\boxed{P_0 = 1}$ donc $P_1 = (0+2-X) P_0 + (1-X) P_0' = 2-X$

$\boxed{P_1 = 2-X}$ donc $P_2 = (1+2-X) P_1 + (1-X) P_1' = (3-X)(2-X) - (1-X)$

$P_2 = 6 - 3X - 2X + X^2 - 1 + X = \boxed{X^2 - 4X + 6 = P_2}$

4) On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: " P_n est de degré n, a pour coefficient dominant $(-1)^n$ "

- initialisation : P_0 est de degré 0, a pour coefficient dominant $1 = (-1)^0$ et pour terme constant $0! = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie
- hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n fixé. Mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

$P_{n+1} = (n+2-X) P_n + (1-X) P_n'$

intéressons nous au terme de plus haut degré de P_{n+1} :

le terme de plus haut degré de P_n est : $(-1)^n X^n$ par HR
le terme de plus haut degré de P'_n est : $(-1)^n \times n X^{n-1}$
donc le terme de plus haut degré de P_{n+1} est le terme de degré $n+1$
c à d $-X \times (-1)^n X^n$ c à d $(-1)^{n+1} X^{n+1}$
P_{n+1} est donc un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ vrai

5) D'après la question 2 et la question 3, on a :

$$\forall x>1, \quad f'(x) = \frac{e^x P_1(x)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} \quad \text{car } P_1 = 2-X$$

donc $\forall x>1, \ (x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = -\dfrac{e^x(2-x)}{1-x} - (x-2)\dfrac{e^x}{1-x}$

$$\forall x>1 \quad \underline{(x-1)f'(x) - (x-2)f(x)} = -\frac{e^x(2-x)}{1-x} + \frac{e^x(2-x)}{1-x} \underline{= 0}.$$

6) Soit $n \geqslant 2$ et $x > 1$. D'après la formule de Leibniz, si on pose :
$u : x \mapsto x-1$, $v : x \mapsto x-2$, $g : x \mapsto (x-1)f'(x)$ et $h : x \mapsto (x-2)f(x)$,
comme ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, on a :

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^{(k)}(x)(f')^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}u^{(k)}(x) f^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0} f^{(n-k+1)}(x)$$

car $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $=0$.

donc $g^{(n)}(x) = \binom{n}{0} u(x) f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) f^{(n)}(x)$

donc $\underline{g^{(n)}(x)} = u(x) f^{(n+1)}(x) + n u'(x) f^{(n)}(x) = \underline{(x-1) f^{(n+1)}(x) + n f^{(n)}(x)}$

et de même, comme $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $v^{(k)}(x) = 0$, on a :

$$\underline{h^{(n)}(x)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} v^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0} v(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} v'(x) f^{(n-1)}(x) = \underline{(x-2) f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)}$$

Or d'après q 5), $g = h$ donc $\forall n \geqslant 2\ \forall x>1$, $\underline{g^{(n)}(x) = h^{(n)}(x)}$ et

ainsi $(x-1) f^{(n+1)}(x) + n f^{(n)}(x) = (x-2) f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$
donc $(x-1) f^{(n+1)}(x) = (x-2-n) f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$

D'après 2), $$(x-1)\frac{e^x P_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}} = (x-2-n)\frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} + n\frac{e^x P_{n-1}(x)}{(1-x)^n}$$

Donc $$-\frac{P_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+1}} = (x-2-n)\frac{P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} + n\frac{P_{n-1}(x)}{(1-x)^n}$$

Donc $$\boxed{P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)}.$$

De plus, $\underline{\text{si } n=1, \text{ l'égalité est vraie}}$ car $P_1(x) = 2-x$ et $P_0(x) = 1$
et $P_2(x) = x^2 - 4x + 6$ d'une part,
d'autre part $(1+2-x)P_1(x) + (x-1)P_0(x) = (3-x)(2-x) + (x-1)$
$= x^2 - 4x + 6$

$\underline{\text{Conc :}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x>1, P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$.

7) D'après q2), $P_{n+1} = (n+2-X)P_n + (1-X)P'_n$ et d'après q6), on a :
$P_{n+1} = (n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1}$ donc $\boxed{P'_n = -n P_{n-1}}$

Ex 2

1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 1&-1&1&0&0&1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&-1&-1&1&0\\ 0&-1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&-1&-1&1&0\\ 0&0&-1&-2&1&1 \end{array}\right)$

$\underset{L_3\leftarrow -L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&-1&-1&1&0\\ 0&0&1&2&-1&-1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_3\\ L_1\leftarrow L_1-L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&1&1\\ 0&1&0&+1&0&-1\\ 0&0&1&2&-1&-1 \end{array}\right)$

$P \sim_L I_3$ donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1&1&1\\ 1&0&-1\\ 2&-1&-1 \end{pmatrix}}$

2)

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 4&-2&-2\\ 1&0&-1\\ 3&-2&-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&-1&1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1&1&1\\ 1&0&-1\\ 2&-1&-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&-1\\ 4&-2&-2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $D = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$

on montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 0^n&0&0\\ 0&1^n&0\\ 0&0&2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2^n \end{pmatrix}}$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$"

- <u>initialisation</u> : si $n=0$, $A^0 = I_3$ et $D^0 = I_3$ donc $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie
- <u>hérédité</u> : supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$ fixé.
  Mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
  $A^{n+1} = A^nA \underset{HR}{=} PD^nP^{-1}\times A = PD^nP^{-1}\times A\times I_3 = PD^nP^{-1}\times A\times \overbrace{P\times P^{-1}}^{=I_3}$
  $A^{n+1} = PD^n(P^{-1}AP)P^{-1} = P(D^nD)P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie
- <u>concl</u> : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ vraie

si $n\geqslant 1$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1&1&1\\ 1&0&-1\\ 2&-1&-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&-1&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0&0&2^n\\ 0&1&0\\ 0&-1&2^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^{n+1}&-2^n&-2^n\\ 1&0&-1\\ -1+2^{n+1}&-2^n&1-2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

si $n=0$, $A^0 = I_3$

donc $\boxed{\text{si } n\geqslant 1 \quad A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}&-2^n&-2^n\\ 1&0&-1\\ 2^{n+1}-1&-2^n&1-2^n \end{pmatrix}}$

4) $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4&-2&-2\\ 1&0&-1\\ 3&-2&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\\ c_n \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n-2b_n-2c_n\\ b_{n+1} = a_n-c_n\\ c_{n+1} = 3a_n-2b_n-c_n \end{cases}$

donc $U_{n+1} = AU_n$

on montre par récurrence que $\underline{U_n = A^nU_0,\ \forall n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1}-1 & -2^n & 1-2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 1 \\ 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 1 \\ 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^{n+1},\ b_n = 1 \text{ et } c_n = 2^{n+1} - 1}$

Ex 3

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{pmatrix}$$

• Si $\lambda - 7 \neq 0$ alors $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda-7} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cette dernière matrice est inversible (matrice triangulaire supérieure sans coefficient diagonal nul) donc elle est équivalente par ligne à I_3 donc $A \sim_L I_3$ donc si $\lambda \neq 7$, A est inversible

• Si $\lambda = 7$ alors $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ or cette matrice n'est pas inversible (matrice triangulaire supérieure avec un coefficient diagonal égal à 0) donc A n'est pas inversible non plus

Dans ce cas on remarque que si on note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ alors $2C_1 - 3C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On propose $\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

• $\boxed{\text{Concl : A est inversible ssi } \lambda \neq 7}$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 2\lambda+1 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2\lambda+1) L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda(2\lambda+1) & \lambda+2-(2\lambda+1) \end{pmatrix}$$

càd $B \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & -2\lambda^2-\lambda+3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ càd $B \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)(1+\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & (1-\lambda)(2\lambda+3) & 1-\lambda \end{pmatrix}$

en effet, $-2X^2 - X + 3$ a pour racine évidente 1 donc $-2X^2 - X + 3$ est divisible par $X - 1$ et

$$\begin{array}{r|l} -2X^2 - X + 3 & X-1 \\ \hline -2X^2 + 2X & -2X-3 \\ -3X+3 & \\ -3X+3 & \\ 0 & \end{array}$$

• <u>si $\lambda = 1$</u> alors $1-\lambda = 0$ et donc $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

or cette matrice est triangulaire supérieure avec deux coefficients diagonaux nuls donc elle n'est <u>pas inversible</u> donc B non plus

Dans ce cas on remarque que si on note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $C_1 = C_2 = C_3$ donc $C_1 + 0C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On propose $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

• <u>si $\lambda \neq 1$</u> alors on fait une disjonction de cas

• <u>si $\lambda \neq -1$</u> alors $1+\lambda \neq 0$

alors $B \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{(1-\lambda)(1+\lambda)} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 2\lambda+3 & 1 \end{pmatrix}$

donc $B \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (2\lambda+3)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2\lambda+3}{1+\lambda} \end{pmatrix}$

or $1 - \frac{2\lambda+3}{1+\lambda} = \frac{1+\lambda-2\lambda-3}{1+\lambda} = \frac{-2-\lambda}{1+\lambda}$

• <u>si $\lambda \neq -2$</u> alors $1 - \frac{2\lambda+3}{1+\lambda} \neq 0$

donc la dernière matrice est <u>inversible</u> donc B aussi

• <u>si $\lambda = -2$</u> alors la dernière matrice n'est <u>pas inversible</u> donc B non plus.

Dans ce cas, on remarque que si on note C_1, C_2, C_3 les 3 colonnes de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, on a <u>$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$</u>

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On propose $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

• <u>si $\lambda = -1$</u> alors $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est <u>inversible</u> donc B aussi.

<u>Concl</u> : $\boxed{B \text{ est inversible ssi } (\lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq -2)}$.