indications pour démontrer P4, P5 et P6 - Chap 18

Rappel : $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des polynômes formels.

<u>dem P4</u> : 1) revoir la déf d'une LCI. Utiliser ensuite P3 (rien à faire)

2) poser $P \times Q = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $Q \times P = (q_i)_{i\in\mathbb{N}}$

A l'aide de la propriété 3 (formule), donner l'expression de p_i et de q_i pour $i \in \mathbb{N}$ et constater que $p_i = q_i$

3) poser $P = (a_i)$, $Q = (b_i)$, $R = (c_i)$, $P\times Q = (p_i)$, $Q\times R = (r_i)$

$P\times(Q\times R) = (d_i)$ et $(P\times Q)\times R = (e_i)$.

Calculer d_i et e_i à l'aide de la formule de P3

(2 sommes doubles sont attendues, elles sont triangulaires

mq $\sum_{k=0}^{i} \sum_{j=0}^{i-k} a_k b_j c_{i-k-j} = \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} c_{i-l}$)

4) Poser $P = (a_i)$, $Q = (b_i)$, $R = (c_i)$, $P\times(Q+R) = (d_i)$

et $(P\times Q)+(P\times R) = (e_i)$ et $P\times Q = (p_i)$ et $P\times R = (q_i)$

Mq $e_i = d_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

5) voir que $p_i = \sum_{k=0}^{i} \delta_{0,k}\, a_{i-k} = 1_{\mathbb{K}} \cdot a_i = a_i$

<u>dem P5</u> : revenir à la définition d'un anneau et utiliser P2 et P4

D'après P4-2 c'est un anneau commutatif.

Pour montrer que c'est un anneau intègre, on raisonne par contraposée en mq $P \neq 0$ et $Q \neq 0 \implies P\times Q \neq 0$

(déjà montré dans une propriété. Laquelle ?)

<u>dem P6</u> : • Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Si $P = (a_i) \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ alors • soit $P = 0_{\mathcal{P}(\mathbb{K})}$ et donc $\alpha P = 0_{\mathcal{P}(\mathbb{K})}$

or $0_{\mathcal{P}(\mathbb{K})}$ est un polynôme formel de degré $-\infty$ donc αP aussi et $\deg(\alpha P) = \deg(P) = -\infty$.

• Soit $P \neq 0_{\mathcal{P}(\mathbb{K})}$ et alors on note $n = \deg P$. On a $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

$\forall i \in \mathbb{N},\ i > n \implies \alpha . a_i = 0$ et $\alpha . a_n \neq 0$

En déduire que $\deg(\alpha P) = \deg P$

• Soit $\alpha = 0$ alors $\alpha . P = (0 . a_i)$ donc $\alpha . P = 0_{\mathcal{P}(\mathbb{K})}$

donc $\deg(\alpha P) = \ldots$