TD 17

exo 6

$f : t \mapsto t^2 + at + b$ est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \neq x_2$

f est donc continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$

on peut donc appliquer le TAF :

il existe $c \in]x_1, x_2[$, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2t + a$

et $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + ax_2 + b - x_1^2 - ax_1 - b = x_2^2 - x_1^2 + a(x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + a(x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)(a + x_2 + x_1)$.

Donc il existe $c \in]x_1, x_2[$, $(x_2 - x_1)(a + x_2 + x_1) = (2c + a)(x_2 - x_1)$

or $(x_2 - x_1)(a + x_1 + x_2) = (2c + a)(x_2 - x_1)$ ssi $(x_2 - x_1)(a + x_1 + x_2 - 2c - a) = 0$

ssi $x_1 = x_2$ ou $x_1 + x_2 = 2c$

ssi $x_1 \neq x_2$ ou $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$

or $x_1 \neq x_2$

donc $\boxed{c = \frac{x_1 + x_2}{2}}$

TD17

ex7 Soient a et b 2 réels avec $a < b$
Soient f et g deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$

On pose $h : [a,b] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x).$$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ en tant que CL.
De plus $h(a) = (f(b)-f(a))\,g(a) - (g(b)-g(a))\,f(a)$
$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$
et $h(b) = (f(b)-f(a))\,g(b) - (g(b)-g(a))\,f(b)$
$= g(a)f(b) - f(a)g(b)$

Donc $h(a) = h(b)$.
D'après le th de Rolle appliqué à h, on a :
il existe $c \in]a,b[$, $h'(c)=0$ càd $(f(b)-f(a))\,g'(c) - (g(b)-g(a))\,f'(c) = 0$
donc il existe $c \in]a,b[$, $(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)$

Rq : on pouvait aussi choisir $h : x \mapsto (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$

Lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des ~~accroissements~~ finis : il existe $c \in]a,b[$, $(f(b)-f(a)) \times 1 = (b-a)\,f'(c)$.

TD 17

ex 8 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > B \Rightarrow |f'(x) - \ell| \leq \varepsilon$

on choisit $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ et on note x_0 à la place de B

alors il existe $x_0 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > x_0 \Rightarrow \ell - \frac{\ell}{2} \leq f'(x) \leq \ell + \frac{\ell}{2}$

c.à.d il existe $x_0 > 0$, $\forall x > x_0$, $f'(x_0) \geqslant \frac{\ell}{2}$ - Soit $x > x_0$, on applique le TAF à la fonction f sur $[x_0, x]$: f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $[x_0, x]$ donc sur $]x_0, x[$:

il existe $c \in]x_0, x[$, $f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0)$

or $f'(c) \geqslant \frac{\ell}{2}$ et $x - x_0 > 0$

donc $f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{\ell}{2}(x - x_0)$

donc $f(x) \geqslant f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0)$

lorsque $x \to +\infty$, $f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0) \to +\infty$

donc par comparaison, $\underline{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.