

P4 ① D'après P3, $\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) \forall Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}), P \times Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ donc $\times$ est une loi sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

② Ma $\times$ est commutative sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Soient $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et $Q = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On note $P \times Q = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$

et $Q \times P = (q_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Soit $i \in \mathbb{N}$

D'une part $p_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$.

D'autre part $q_i = \sum_{j=0}^i b_j a_{i-j} = \sum_{k=0}^i b_{i-k} a_k = p_i$

changement d'indice $k = i - j$

lorsque $j=0, k=i$

lorsque $j=i, k=0$

Donc $P \times Q = Q \times P$

③ $\times$ est associative sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$

On pose $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, Q = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}, R = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}, (P \times Q) = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}, (Q \times R) = (r_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$P \times (Q \times R) = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}, (P \times Q) \times R = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$d_i = \sum_{k=0}^i a_k r_{i-k}$ or $r_{i-k} = \sum_{j=0}^{i-k} b_j c_{i-k-j}$ donc $d_i = \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^{i-k} a_k b_j c_{i-k-j}$

$e_i = \sum_{l=0}^i p_l c_{i-l} = \sum_{l=0}^i \sum_{m=0}^l a_m b_{l-m} c_{i-l}$

si $m=k, e_i = \sum_{l=0}^i \sum_{k=0}^l a_k b_{l-k} c_{i-l}$ $\begin{cases} 0 \leq k \leq l \\ 0 \leq l \leq i \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 0 \leq k \leq i \\ k \leq l \leq i \end{cases}$

$e_i = \sum_{k=0}^i \sum_{l=k}^i a_k b_{l-k} c_{i-l}$

$j = l - k$ ssi $l = j + k$ donc $\begin{cases} i - l = i - j - k \\ l - k = j \\ 0 \leq l - k \leq i - k \text{ car } k \leq l \leq i \end{cases}$

donc $e_i = \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^{i-k} a_k b_j c_{i-j-k} = d_i$ et $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$

④ $\times$ est distributive par rapport à $+$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$P \times (Q + R) = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}, (P \times Q) + (P \times R) = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$(Q + R) = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on note toujours $P \times Q = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $P \times R = (q_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$s_i = b_i + c_i$ et $p_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$ et $q_i = \sum_{j=0}^i a_j c_{i-j}$

$d_i = \sum_{l=0}^i a_l s_{i-l} = \sum_{l=0}^i a_l (b_{i-l} + c_{i-l}) = \sum_{l=0}^i a_l b_{i-l} + \sum_{l=0}^i a_l c_{i-l}$

$e_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} + \sum_{j=0}^i a_j c_{i-j}$ on pose $k = j = l$

$= \sum_{l=0}^i a_l b_{i-l} + \sum_{l=0}^i a_l c_{i-l} \Rightarrow e_i = d_i \Rightarrow P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R)$.

P4 ⑤ On pose $1 = (\delta_{0,i})_{i \in \mathbb{N}}$. Mg $\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, $1 \times P = P \times 1 = P$

2/2

Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. On pose $1 \times P = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Soit $i \in \mathbb{N}$. $b_i = \sum_{k=0}^i \delta_{0,k} a_{i-k} = \delta_{0,0} \times a_{i-0} = 1 \times a_i = a_i$

Donc $1 \times P = P$ et comme $\times$ est commutative sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, $P \times 1 = P$
donc 1 est l'élément neutre pour $\times$.

P5 Mg $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif

- $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif d'après P2
 - $\times$ est une loi sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$
 - $\times$ associative sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$
 - $\times$ commutative sur $\mathcal{P}(\mathbb{K})$
 - $\times$ est distributive par rapport à $+$
 - 1 est élément neutre pour $\times$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$
- } d'après P4

Donc $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif

Mg $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \times)$ est intégral,

càd mg $\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) \neq 0, \forall Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}), P \times Q = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.

Par contraposée, mg $\forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) \neq 0, \forall Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) \neq 0, P \times Q \neq 0$

c'est ce que l'on a fait dans la démonstration de P3, cas $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Je le reprends ici: si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$ alors $\deg P \in \mathbb{N}$ et $\deg Q \in \mathbb{N}$
et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ donc $\deg(P \times Q) \in \mathbb{N}$ donc $P \times Q \neq 0$

Conclusion: $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif intégral.

P6 Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et $Q = (\alpha \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Mg

$Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Si $P = 0$ alors $\forall i \in \mathbb{N}, a_i = 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha \cdot a_i = 0$
donc $Q = 0$ donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et dans ce cas
 $P = Q$ donc $\deg P = \deg Q$ donc $\deg(\alpha P) = \deg(P) = -\infty$

- Si $P \neq 0$ alors $\deg(P) \in \mathbb{N}$. Posons $m = \deg(P)$

Alors $\forall i \in \mathbb{N}, i > m \Rightarrow a_i = 0$

donc $\forall i \in \mathbb{N}, i > m \Rightarrow \alpha a_i = 0$

donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ et $\deg(Q) = \deg(\alpha P) \leq \deg(P)$

- si $\alpha = 0$ alors $\forall i \in \mathbb{N}, \alpha \cdot a_i = 0$ donc $\alpha \cdot P = 0$
donc $\deg(\alpha \cdot P) = -\infty$.

- si $\alpha \neq 0$ alors le terme de plus haut degré de $\alpha \cdot P$
est $\alpha \cdot a_m \times X^m$. Or $a_m \neq 0$ car $\deg(P) = m$ et
 $\alpha \neq 0$ donc $\alpha \cdot a_m \neq 0$ donc $\deg(\alpha \cdot P) = m$
donc $\deg(\alpha \cdot P) = \deg(P)$