Semaine du 03/03

Chapitre 17 : Dérivation : en exercices

Dérivée en un point, fonction dérivée : dérivabilité en un point, nombre dérivé. Définition par le taux d'accroissement. Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Interprétation cinématique de la notion de dérivabilité en un point. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle, fonction dérivée. Opération sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Tangente au graphe d'une réciproque.

Extremum local et point critique Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. Un point critique est un zéro de la dérivée. **Théorème de Rolle et des accroissements finis** Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Interprétation graphique et cinématique de ces résultats. Inégalités des accroissements finis : : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne. Application au suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers l (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l lorsque x tend vers a. Interprétation géométrique. Si l est un nombre réel alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz, quotient, composition, réciproque.

Fonctions complexes Brève extension aux fonctions à valeurs complexes : inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, caractérisation des fonctions constantes, de la dérivaibilité en termes de partie réelle et imaginaire. Interprétation cinématique. Le théorème de Rolle ne s'étend pas.

Chapitre 19 : Polynômes

Anneau des polynômes à une indéterminée Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Degré d'une somme, d'un produit. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Composition.
Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.
Fonctions polynomiale et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes. Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Détermination d'un polynôme par la fonction polyno- miale associée. Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète : les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrou- vées rapidement).
Dérivation Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polyno- miale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité dune racine par les polynômes dérivés successifs.

Démonstrations :

1. Si $P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des polynômes formels sur $\mathbb{K}$ alors
   $P \times Q = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \cdots, a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \cdots)$
   $= (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $p_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$ est un polynôme formel et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ (propriété 3)
2. $\diamond\diamond$ théorème de la division euclidienne (théorème 1 : unicité)
3. Formule de Taylor (théorème 2)
4. $\diamond\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre k de P, alors α est racine d'ordre $k-1$ de P' (propr 17)
5. $\diamond$ Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs (propr 18).

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

— Si f est dérivable en a, $\bar{f}$ aussi et $\bar{f}'(a) = \overline{f'(a)}$, sous P14 chap 17.
— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = 0$. Montrer que $P = 0$ (sous th4 chap 18)
— Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient a et b deux réels distincts, avec $a \neq b$. Soient α et β les restes respectifs de la division de P par $(X-a)$ et par $(X-b)$. Quel est le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$? (sous th4 chap 18)

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours (par exemple une ou deux dérivées usuelles) et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à mettre en oeuvre l'algorithme de la division euclidienne, à décider si un polynome donné est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ et à donner la définition d'une fonction symétrique élémentaire des racines d'un polynôme scindé P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dans un cas simple ($n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 5$) ainsi que son expression en fonction des cofficients de P. Les exercices porteront ensuite sur la recherche du degré et du coefficient dominant d'un polynôme, sur la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, sur la multiplicité des racines, sur la dérivation des polynômes, sur la dérivation de fonctions à valeurs complexes, ou plus largement sur le chapitre dérivation.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre $\diamond$
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien $\diamond$
Le Gociv Edenn