TD 17

ex 2-3 $f : x \mapsto x - a + be^{x}$ si $x \geq 0$
$x \mapsto \cos x - x$ si $x < 0$

f est définie en 0

- Continuité de f : f continue en tout point de $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{0^+} f = a+b$ et $\lim\limits_{0^-} f = 1$

f cont en 0 ssi $a+b=1$

Si $a+b \neq 1$, $f \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Si $a+b=1$ alors $f(x) = x + (1-b) + be^{x}$ si $x \geq 0$
$f(x) = \cos x - x$ si $x \leq 0$

- dérivabilité de f

$\forall x \neq 0$, $f'(x) = 1 + be^{x}$ si $x > 0$
$f'(x) = -\sin x - 1$ si $x < 0$.

$\lim\limits_{0^-} f' = 1+b$ et $\lim\limits_{0^+} f' = -1$ donc $f'_g(0) = 1+b$ et $f'_d(0) = -1$

donc f der en 0 ssi $b = -2$. Si $b \neq -2$, f n'est pas der sur $\mathbb{R}$

- continuité et dérivabilité de f' : si $b = -2$

f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (sur $\mathbb{R}$)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f''(x) = be^{x}$ si $x > 0$ $f''(x) = -\cos x$ si $x \leq 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x) = -\cos 0 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = -2 \times e^{0} = -2$

donc $f''_d(0) \neq f''_g(0)$

donc f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

ex 2-4

f est continue sur $\mathbb{R}$ (aucune difficulté).

Dérivabilité de f : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x$ pour $x > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x$ pour $x < 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$

Donc $f'_g(0) = 0$

et $f'_d(0) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} \times \frac{\sin x}{x} + \sqrt{x}\cos x = 0 + 0 = 0$

Donc f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$

f' est continue sur $\mathbb{R}$ (à vérifier)

f' n'est pas dérivable à droite en 0 (à vérifier) donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mais $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

TD 17 ex 4-3

Soit $x \in \mathbb{R}$ $e^x \cos x = \mathrm{Re}(e^{ix} \cdot e^x) = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)$.

Donc $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{(1+i)x}\right)\right)$

$= \mathrm{Re}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$

$= \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(1+i)x}\right)$

$= \mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} e^x e^{ix}\right)$

$= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \,\mathrm{Re}\left(e^{i\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}\right)$

$= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

TD17 ex 13

f est dérivable sur I donc $\overline{f}$ est dérivable sur I (ex sous P14)
et $(\overline{f})' = \overline{f'}$. Ainsi, en tant que produit de 2 fonctions dérivables sur I,
on a $f \times \overline{f}$ est dérivable sur I et $(f\overline{f})' = f'\overline{f} + f(\overline{f})' = f'\overline{f} + f\overline{f'}$
donc $(f\overline{f})' = f'\overline{f} + \overline{f'\overline{f}} = 2\,\mathrm{Re}(f'\overline{f})$ car $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z}) \times \frac{1}{2}$

<u>Concl</u> : $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $g' = 2\,\mathrm{Re}(f'\overline{f})$

TD 17 ex : 14

Soit $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$. Comme f est dérivable sur I, f est continue sur I donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in J = I \cap]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \neq 0$.

Ainsi f ne s'annule pas sur $J \subset I$

f est dérivable sur J donc $\bar{f}$ aussi (cf cours P14).

Donc $g = f\bar{f}$ est dérivable sur J et est à valeurs dans $]0,+\infty[$

De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dér sur $]0,+\infty[$

Donc $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est dérivable sur J en tant que composée de fonctions dérivables

Or $\forall x \in J$, $|f|(x) = \sqrt{g(x)}$, donc $|f|$ est dérivable sur J.

et $|f|' = \dfrac{g'}{2\sqrt{g}} = \dfrac{f'\bar{f} + f\bar{f}'}{2|f|} = \dfrac{f'\bar{f} + \overline{f'\bar{f}}}{2|f|} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(f'\bar{f})}{2|f|} = \dfrac{\mathrm{Re}(f'\bar{f})}{|f|}$

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$