

Ex 15

unicité: soit (U, V) et $(\hat{U}, \hat{V})$ deux couples solutions

$$A(U - \hat{U}) = B(\hat{V} - V) \text{ puisque } AV + BV = 1 = A\hat{U} + B\hat{V}$$

$$A \mid B(\hat{V} - V) \text{ et } A \wedge B = 1 \text{ donc par le th de Gauss,}$$

$$A \mid \hat{V} - V$$

$$\text{or } \deg(\hat{V} - V) \leq \max(\deg(\hat{V}), \deg(V)) < \deg A$$

$$\text{donc } \hat{V} - V = 0 \text{ donc } \hat{V} = V \text{ et } \hat{U} = U$$

existence: $A \wedge B = 1 \Rightarrow \exists (U, V) \in K[X] \text{ tq } AV + BV = 1$

On réalise la division euclidienne de U par B :

$$U = BQ + \hat{U} \text{ avec } \deg \hat{U} < \deg B.$$

$$\text{On pose } \hat{V} = V + AQ$$

$$A\hat{U} + B\hat{V} = A(U - BQ) + B(V + AQ) = AU + BV = 1 \text{ avec } \deg \hat{U} < \deg B -$$

$$\text{Reste à montrer } \deg \hat{V} < \deg A.$$

$$0 = \deg(A\hat{U} + B\hat{V}) < \max(\deg A\hat{U}, \deg B\hat{V}) \text{ donc } \deg A\hat{U} = \deg B\hat{V}$$

$$\text{donc } \deg \hat{V} = \deg A + \underbrace{\deg \hat{U} - \deg B}_{\leq 0} < \deg A.$$