$(1+i)^2$, Ex 12 (REF 36)

① (S) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \sigma_1=-2 \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=0 \\ \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=1 \end{cases}$

$\sigma_1=-2$

$\sigma_1^2-2\sigma_2=0 \Rightarrow \sigma_2=\frac{\sigma_1^2}{2}=+2.$

$=2i$

$3\sigma_3=-\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2+1$

$=2(4-4)+-2\times 2=-4+1 \qquad \sigma_3=-\frac{3}{3}=-1$

Donc (x,y,z) est sol de (S)

ssi $x\ y\ z$ sont racines de $P=X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$. Or pour tout $k\in[\![1,3]\!]$, $\sigma_k=\frac{(-1)^k a_{3-k}}{a_3}$ donc $P=X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$ (en prenant $a_3=1$)

càd $P=X^3+2X^2+2X+1$.

Cherchons les racines de P.
-1 est racine évidente

$$\begin{array}{l|l} X^3+2X^2+2X+1 & X+1 \\ \underline{X^3+X^2} & \overline{X^2+X+1} \\ \quad X^2+2X & \\ \quad \underline{X^2+X} & \\ \qquad X+1 & \end{array}$$

donc $P=(X+1)(X^2+X+1)$

càd $P=(X+1)(X-j)(X-\bar{j})$

Concl: $\mathcal{S}=\{s(-1,j,\bar{j})$ avec $s\in S_3\}$.

② (S) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-13 \\ xyz=-12 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \sigma_1=0 \\ \sigma_2=-13 \\ \sigma_3=-12 \end{cases}$

(x,y,z) sol de (S) ssi $x, y\ z$ sont racines de $P=X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$

$P=X^3-13X+12$

or 1 est racine évidente de P

$$\begin{array}{l|l} X^3-13X+12 & X-1 \\ \underline{X^3-X^2} & \overline{X^2+X-12} \\ \quad X^2-13X & \\ \quad \underline{X^2-X} & \\ \quad -12X+12 & \end{array}$$

$\Delta=1-4\times 12=1+48=49$
$=7^2$

$X=\frac{-1\pm 7}{2}=-\frac{8}{2}=-4$ ou
$=\frac{6}{2}=3.$

donc $P=X^3-13X+12=(X-1)(X+4)(X-3)$.

Les solutions de (S) sont $(1,3,-4)$ et tous les tuplets obtenus par permutations (6 possibilités).