

Ex 1 Soit $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ avec $a_m \neq 0$.

- Si P est nul alors $P(X+1) - P(X) = 0$ et a pour degré $-\infty$

- Si $\deg(P) \neq 0$ alors $P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^m a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^m a_k X^k$

$$= \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j \right) - \sum_{k=0}^m a_k X^k$$

le coeff de degré m est: $a_m \binom{m}{m} - a_m = 0$

le coeff de degré $m-1$ est: $a_{m-1} \binom{m-1}{m-1} + a_m \binom{m}{m-1} - a_{m-1} = m a_m \neq 0$

car $a_m \neq 0$ donc $P(X+1) - P(X)$ est de degré $\deg P - 1$ si $\deg P = m \geq 1$

Ex 6

$$-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 3)(-5X^2 - 21X - 84) + (-357X + 253)$$

$$X^3 + iX^2 + X = (X - i + 1)(X^2 + (2i - 1)X - 3i) + 3(i + 1)$$

Enfinement, $P_4 = -(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})(X^2 - (\sqrt{3} - 1)X + 2 - \sqrt{3})(X^2 + (\sqrt{3} + 1)X + \sqrt{3} + 2)$

Ex 8

$$P_1 = (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{\frac{6i\pi}{5}})(X - e^{\frac{8i\pi}{5}})$$

$$P_1 = (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}})$$

$$P_1 = (X - 1)(X^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}X + 1)$$

• Pour P_2 on cherche les racines sixièmes de $-1 = e^{i\pi}$ en résolvant $(ze^{i\pi/6})^6 = e^{i\pi}$ ou en prenant une solution particulière $(e^{i\pi/6})$ et en la multipliant par les racines sixièmes de l'unité (car $z^6 = e^{i\pi}$ ssi $(\frac{z}{e^{i\pi/6}})^6 = 1$)

$$\begin{aligned} \text{on obtient } P_2 &= (X - e^{i\pi/6})(X - e^{i3\pi/6})(X - e^{i5\pi/6})(X - e^{i7\pi/6})(X - e^{i9\pi/6})(X - e^{i11\pi/6}) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - 2\cos\frac{\pi}{6}X + 1)(X^2 - 2\cos\frac{5\pi}{6}X + 1) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

• $P_3 = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = Q(Y)$ où $Q(Y) = Y^3 + Y^2 + Y + 1$ avec $Y = X^3$

$$Q(Y) = (Y - e^{i\pi/2})(Y - e^{i\pi})(Y - e^{i3\pi/2}) = (Y - i)(Y + i)(Y + 1)$$

$$\text{car } (Y - i)(Y^3 + Y^2 + Y + 1) = Y^4 - 1 \text{ et } Y^4 - 1 = (Y - i)(Y - e^{i\pi/2})(Y - e^{i3\pi/2})(Y - e^{i\pi})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_3 &= (X^3 + 1)(X^3 - i)(X^3 + i) = (X^3 + 1)(X^6 + 1) = (X^3 + 1)P_2 \\ &= (X + 1)(X + i)(X + \bar{i})P_2 = (X + 1)(X^2 - X + 1)P_2 \end{aligned}$$

$$P_4 = (1 - X^2)^3 + (2X)^3$$

$$\begin{aligned} &= (1 - X^2 + 2X)(1 - X^2)^2 - (1 - X^2)2X + 4X^2 \\ &= (1 + 2X - X^2)(X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1) = (1 + 2X - X^2)((X^2 + X)^2 + (X - 1)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + 2X - X^2)((X^2 + X)^2 - (iX - i)^2) = (1 + 2X - X^2)(X^2 + (1 - i)X + i)(X^2 + (1 + i)X - i) \\ P_4 &= -(X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2})(X - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + i))(X + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 + i))(X - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i))(X + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}(1 - i)) \end{aligned}$$