Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel qui, sauf précision, peut être nul.

Partie A : Existence d'une famille de polynômes

1. (a) En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ avec la formule du binôme de Newton, montrer qu'il existe des polynômes T_n et U_n tels que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \text{ et } (\sin\theta) \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta).$$

   (b) Montrer l'unicité des polynômes T_n et U_n vérifiant la propriété précédente. Le polynôme T_n, respectivement U_n, est appelé n-ième polynôme de Tchébychev de première, respectivement de seconde, espèce.

   (c) Vérifier que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Ecrire $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire T_2 et T_3.

   (d) Déterminer directement T_4.

2. Que peut-on dire de la parité du polynôme T_n ?

3. (a) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

   En déduire que pour $n \geq 1$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

   (b) En utilisant cette formule, calculer T_5 et T_6.

4. Montrer que le degré de T_n est n et calculer son coefficient dominant.

5. Simplifier, pour tout $n \geq 1$, $2XU_n - U_{n-1}$ puis $(1 - X^2)U_n^2 + T_n^2$.

Partie B : Détermination des racines de T_n

On suppose ici $n \geq 1$ et on cherche les racines de T_n.

1. Trouver les racines de T_1, T_2 et T_3.

2. En utilisant la relation de définition de la question A.1.a., calculer les racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que l'on obtient ainsi toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ de T_n.

3. On suppose $n \geq 2$, montrer que T_n' admet $(n?1)$ racines réelles distinctes.

4. Montrer que T_n vérifie la relation différentielle : $n^2T_n - XT_n' + (1 - X^2)T_n'' = 0$ (On pourra considérer la fonction $x \mapsto T_n(\cos x)$)

5. En utilisant la relation précédente, exprimer les coefficients de T_n (on écrira $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$). On commencera par montrer que : $\forall h \in \mathbb{N},\ a_{h-2} = \dfrac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)a_h}$ puis on cherchera une relation entre a_{n-2p} et a_n, enfin on exprimera a_{n-2p} à l'aide de coefficients binomiaux.

Partie C : Arithmétique des polynômes

On cherche ici les polynômes (P, Q) vérifiant $P^2 = 1 + (X^2 - 1)Q^2$ et tels que $\deg P = n$.

1. Etudier le cas $n < 1$. Dans la suite on suppose $n \geq 1$.

2. Quel est le degré de Q ?

3. Montrer que Q divise PP' dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire alors que Q divise P'. Quel est le quotient de cette division ?

4. Vérifier la relation $(X^2 - 1)P'' + XP' = n^2P$.
   Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = P(\cos(\theta))$, en déduire une équation différentielle simple vérifiée par f. En déduire les couples (P, Q) solutions.