Semaine du 10/03

Chapitre 18 : Polynômes

Anneau des polynômes à une indéterminée Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Degré d'une somme, d'un produit. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Composition.
Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.
Fonctions polynomiale et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes. Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Détermination d'un polynôme par la fonction polyno- miale associée. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète : les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrou- vées rapidement).
Dérivation Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polyno- miale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité dune racine par les polynômes dérivés successifs.
Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$. Relation de Bézout. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu. PPCM. Notation $A \vee B$. Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans Z. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bé- zout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ Théorème de d'Alembert-Gauss. La démonstration est hors programme. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même ordre de multiplicité.
Frations rationnelles Corps $\mathbb{K}(X)$. La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.
Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.
Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
Formule d'interpolation de Lagrange Si x_1 , . . . , x_n sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et y_1 , . . . , y_n des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Expression de P.

Démonstrations :

1. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (propriété 24 et encadré qui précède ; la démonstration est écrite avant l'encadré, elle est coupée par la propriété 23)
2. $\diamond\diamond$ Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune (propr 31)
3. $\diamond$ si A et B sont premiers entre eux alors $(A \vee B)$ et AB sont associés (propr 36.1).
4. Si F et G sont deux fractions rationnelles, alors
   $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   $\deg(FG) = \deg F + \deg G$ (propr 37)
5. $\diamond\diamond$ détermination de la partie polaire d'un pôle simple (propr 39) et du résidu d'ordre maximal d'un pôle double (P40)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

- Factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ (sous P22)
- Montrer que P et Q sont premiers entre eux ssi $P + Q$ et PQ le sont (sous P36).
- Déterminer les parties polaires de $\dfrac{X^4 - 8X^2 + 9X - 7}{(X-2)^2(X+3)}$ (avant le paragraphe 8.2)

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$, à décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle puis à utiliser cette décomposition pour déterminer des primitives ou calculer des sommes. Les exercices porteront ensuite sur l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, le lien entre coefficients et racines (résolution de systèmes), les équations polynomiales, la multiplicité des racines, la dérivation des polynômes, ...
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien $\diamond$
Le Gociv Edenn