Chapitre 19 : Fonctions convexes

L'intérêt des fonctions convexes est de produire un grand nombre d'inégalités remarquables, dites inégalités de convexité, et d'apporter des facilités pour la recherche d'extrema.
Dans tout le chapitre on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Fonctions convexes

1.1 Définition et interprétation géométrique

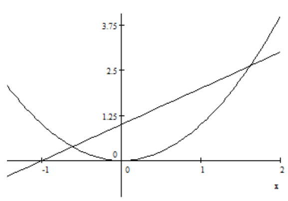
Définition 1.

1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I lorsque*

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

2. *Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave.*

Remarque 1. *Position du graphe par rapport à ses sécantes.*
Tous les points de l'arc M_1M_2 sont situés sous la corde $[M_1M_2]$.



► Exemples :

1. Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
3. Une somme de fonctions convexes sur I est convexe sur I.

Propriété 1.

f est convexe sur I ssi
$\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ *tels que* $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0, \quad f\left(\dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \leqslant \dfrac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)}{\alpha_1 + \alpha_2}$

1.2 Généralisation de l'inégalité de convexité

Propriété 2 (Inégalité de Jensen).

Soit $n \geqslant 2, \quad f : I \to \mathbb{R}$ convexe sur I.

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

$\forall x_1 ..., x_n \in I, \quad f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$

► Exemple : Soient $x_1, ..., x_n \geqslant 0$, montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (la moyenne arithmétique est inférieure ou égale à la moyenne quadratique).

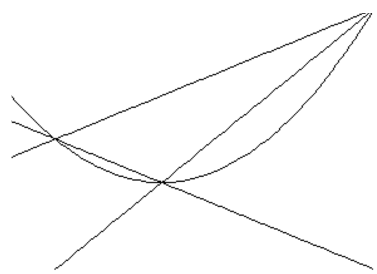
Lemme 1 (Inégalité des pentes).

Si f est convexe sur I alors

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ x<y<z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Propriété 3 (Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes).

f est convexe sur I si et seulement si $\forall a \in I \quad t_a\ :\ I\setminus\{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.



Remarque 2. — *f est concave sur I si et seulement si $\forall a \in I \quad t_a\ :\ I\setminus\{a\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est décroissante sur $I\setminus\{a\}$.*

— *f est convexe et concave si et seulement si $(x,y) \longmapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est constante ce qui équivaut à f est affine.*

2 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Propriété 4 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f est convexe sur I si et seulement si la fonction f' est croissante sur I.

Remarque 3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante.*

► Exemple : ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$; exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables).

Lorsque f est deux fois dérivable sur I,

1. *f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I*
2. *f est concave sur I si et seulement si $f'' \leqslant 0$ sur I*

Propriété 6 (Position de la courbe par rapport à ses tangentes).

Si f est une fonction dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si Γ_f est situé au dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire $\forall x, a \in I \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'(a)$.

► Exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$. $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.