TD 20 : Analyse asymptotique

▶ Exercice 1 (refA12) : Déterminer les limites des quantités $f(x)$ suivantes en utilisant au besoin des équivalents :

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+2x^2)}{x\ln(1+x)}$ en 0.
2. $\dfrac{x\ln(e^x-1)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
3. x^x en 0.
4. $(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ en 0.
5. $(2+x)^{x^2}$ en 0 et $+\infty$.
6. $(\dfrac{1}{x})^{\sin x}$ en 0.

▶ Exercice 2 (refA11) : Donner un équivalent simple de

1. $\ln x$ en 1 et $+\infty$.
2. $\ln^4(1+x)$ en 0 et $+\infty$.
3. e^x-1 en 0 et $\pm\infty$.
4. $\sqrt{x}-1$ en 1.
5. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1$ en 0.
6. $\sqrt[3]{8+x}-2$ en 0.

▶ Exercice 3 (refA13) : Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{\theta}{n})^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{i\theta}{n})^n$.

▶ Exercice 4 (refA7) : Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des expressions suivantes :

1. $\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$.
2. $\sin(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$.
3. $\tan(\dfrac{2}{n+1})$.
4. $1-\exp(\dfrac{1}{2^n+1})$.
5. 2^{n+1}.
6. $\ln n$.

▶ Exercice 5 (refA8) : Examiner les limites en $+\infty$ de :

1. $n\ln(2-\dfrac{1}{n})$.
2. $n-\sqrt{n^2+n+1}$.
3. $(n+1)(\sqrt[n]{3}-1)$.

4. $(1+\frac{2}{n})^{n+1}$.
5. $\frac{n\ln(e^n-1}{n^2+\cos n+1}$.
6. $(\ln(1+e^{-n}))^{\frac{1}{n}}$.
7. $(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

▶ Exercice 6 (ref A9) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que (u_n) décroit et converge vers 0.
3. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Retrouver ainsi la limite de (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ puis donner un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$ en $+\infty$.

▶ Exercice 7 (refB1) : Effectuer le DL de $x \mapsto f(x) = (1+x)^{\frac{4}{3}}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 3.

▶ Exercice 8 (refB5) : Effectuer le DL de $x \mapsto f(x) = \frac{\text{arcsin}x}{\sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0 et à l'ordre 5.

▶ Exercice 9 (refB6) : Soit $x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'au voisinage de 0, $f(x) = x + o(x)$. Etudier l'existence d'une asymptote oblique pour la représentation graphique de C_f, ainsi que la position relative de C_f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

▶ Exercice 10 (refB7) : Montrer que $\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{x}{2}$ au voisinage de 0.

▶ Exercice 11 (refB9) : Etude au voisinage de 0 de la fonction $f \ : \ x \mapsto \frac{1}{\text{arcsin}x} - \frac{1}{x}$.

▶ Exercice 12 (refB3) : Effectuer le DL généralisé de $x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln(\sqrt{1+x^2})$ au voisinage de $+\infty$ et à la précision x^{-4}.

▶ Exercice 13 (refB4) : Effectuer le DL généralisé de $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0 et à la précision x^2.

▶ Exercice 14 (refB10) : Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet une fonction réciproque et que sa bijection réciproque f^{-1} admet un DL à tout ordre et en tout point. Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 de f^{-1}.

▶ Exercice 15 (refB11) : Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$ pour tout réel x. Calculer $f^{(12)}(0)$. Calculer $\tan^{(7)}(0)$.

▶ Exercice 16 (RefB13) : Etude de f: $x \mapsto x^2\text{arctan}(\frac{1}{1+x})$.

▶ Exercice 17 (RefB14) : Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de $x \mapsto \sqrt{x}$.