Partie A

1°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a grâce à de Moivre et Newton :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\cos\theta)^{n-p}(i\sin\theta)^p$$

Les termes d'indices pairs de la sommation contribuent à la partie réelle et les termes d'indices impairs contribuent à la partie imaginaire (car $i^{2q} = (-1)^q$ et $i^{2q+1} = (-1)^q i$). Ainsi, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, on obtient, pour $n \geqslant 1$:

$$\cos(n\theta) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2q} (\cos\theta)^{n-2q}(-1)^q(\sin\theta)^{2q}$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2q+1} (\cos\theta)^{n-2q-1}(-1)^q(\sin\theta)^{2q+1}$$

Il suffit alors de remarquer que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, pour obtenir :

$$\cos(n\theta) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2q} (\cos\theta)^{n-2q}(-1)^q(1-\cos^2\theta)^q$$

$$\sin(n\theta) = \sin(\theta) \cdot \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2q+1} (\cos\theta)^{k-2q-1}(-1)^q(1-\cos^2\theta)^q$$

On peut donc prendre :

$$T_n(X) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^q \binom{n}{2q} X^{n-2q}(1-X^2)^q ;$$

$$U_n(X) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^q \binom{n}{2q+1} X^{n-2q-1}(1-X^2)^q$$

Notons que l'on a directement $T_0 = 1$ et $U_0 = 0$, et la formule donnant T_n reste donc valable pour $n = 0$.

b) Considérons un polynôme P_n tel que : $\forall\,\theta, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$. En faisant décrire à θ le segment $[0,\pi]$, on a donc : $\forall\, x \in [-1,1]$, $(T_n - P_n)(x) = 0$, et le polynôme $T_n - P_n$ admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

De la même façon, si $\forall\,\theta, \sin(\theta)U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta) = \sin(\theta)Q_n(\cos\theta)$, pour un certain polynôme Q_n, alors, en faisant décrire à θ l'intervalle $]0,\pi[$, il vient : $\forall x \in]-1,1[$, $(U_n - Q_n)(x) = 0$, et $U_n - Q_n$ admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

On a donc bien prouvé l'unicité, pour chaque valeur de n, du polynôme T_n ou U_n solution.

c) Facilement : $T_0 = 1$, $T_1 = X$ (car $\cos(0.\theta) = 1$ et $\cos(1.\theta) = \cos\theta$!)
Comme $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (partir de la formule donnant $\cos(2\theta + \theta)$ et utiliser $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \ldots$), il vient :

$$T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X$$

d) $T_4 = \binom{4}{0}X^4 - \binom{4}{2}X^2(1-X^2) + \binom{4}{4}(1-X^2)^2 = X^4 - 6X^2 + 6X^4 + 1 - 2X^2 + X^4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2°) D'après l'écriture en extension de T_n, on voit que T_n ne possède que des monômes de degré pair si n est pair et la fonction polynomiale associée est alors paire, et que T_n ne posséde que des monômes de degré impair si n est impair et la fonction polynomiale est alors impaire.

3° a) Il suffit d'appliquer la formule de trigonométrie correspondante. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta . T_n(\cos\theta)$$

En faisant varier θ dans $[0,\pi]$, on en déduit que le polynôme $T_{n+1} + T_{n-1} - 2XT_n$ s'annule en tout point de $[-1,1]$, donc est le polynôme nul, ce qui donne la relation de récurrence annoncée.

$T_5 = 2XT_4 - T_3$
$= 16X^5 - 16X^3 + 2X - 4X^3 + 3X$
$= 16X^5 - 20X^3 + 5X$

b) D'où : $T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$, $T_6 = 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$.

$T_6 = 2XT_5 - T_4$
$= 32X^6 - 40X^4 + 10X - 8X^4 + 8X^2 - 1$
$= 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$

2/4

4°) Du rang 1, jusqu'au rang 6, le degré de T_n est n et le coefficient dominant est 2^{n-1} (attention au rang 0, le degré vaut 0, mais le coefficient dominant est 1).

Supposons cette propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \geqslant 1$, alors $2XT_n - T_{n-1}$ est de degré exactement $n+1$ et de coefficient dominant $2.2^{n-1} = 2^n$. Ainsi T_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominnant 2^n. On conclut alors par le principe de récurrence :

à rédiger avec une récurrence double

$$\text{pour tout } n \geqslant 1,\ T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient } 2^{n-1}.$$

5°) Pour tout θ de $]0, \pi[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2\cos\theta U_n(\cos\theta) - U_{n-1}(\cos\theta) &= \frac{2\cos\theta\sin(n\theta) - \sin[(n-1)\theta]}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] - \sin[(n-1)\theta]}{\sin\theta} = U_{n+1}(\cos\theta) \end{aligned}$$

Ainsi les polynômes $2XU_n - U_{n-1}$ et U_{n+1} sont égaux (puisque les fonctions polynômes associées coïncident en une infinité de points).

De même, pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$(1-\cos^2\theta)U_n^2(\cos\theta) + T_n^2(\cos\theta) = \sin^2\theta\frac{\sin^2(n\theta)}{\sin^2\theta} + \cos^2(n\theta) = 1$$

Soit, par l'argument maintenant habituel : $(1-X^2)U_n^2 + T_n^2 = 1$.

Partie B

1°) 0 est la seule racine de T_1, les racines de T_2 sont $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et les racines de T_3 sont 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2°) Soit x une éventuelle racine de T_n, comprise entre -1 et 1. Il existe donc θ compris entre 0 et π telle que $x = \cos\theta$. D'où :

$$T_n(x) = 0 \Longleftrightarrow T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0.$$

Le nombre $n\theta$ est donc congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, il existe donc n angles solutions : $\theta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2n}$, avec $0 \leqslant j \leqslant n-1$ (θ doit appartenir à $[0, \pi]$).

La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on obtient ainsi n racines distinctes : $x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n}$, avec $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Or T_n est un polynôme de degré exactement n, il ne peut donc admettre plus de n racines dans $\mathbb{C}$: on vient d'obtenir toutes les racines (complexes) de T_n.

La factorisation en produit de polynômes irréductibles de T_n en découle :

$$T_n = 2^{n-1}\left(X - \cos(\frac{\pi}{2n})\right)\left(X - \cos(\frac{3\pi}{2n})\right)\cdots\left(X - \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2n})\right).$$

3)

Notons $t_n : x \mapsto T_n(x)$ et t'_n, sa dérivée. On a alors $t'_n(x) = (T'_n)(x)$.
On sait que T_n donc t_n s'annule en y_k et que les y_k sont distincts,
plus précisément : $y_0 > y_1 > \cdots > y_{n-2} > y_{n-1}$.
Appliquons $n-1$ fois le théorème de Rolle entre les points y_k et y_{k+1} (pour $k \in [\![0, n-2]\!]$).
$t_n(y_k) = t_n(y_{k+1}) = 0$, donc il existe $z_k \in]y_{k+1}, y_k[$ telles que $t'_n(z_k) = 0$
On a donc l'entrelacement : $y_0 > z_0 > y_1 > z_1 > y_2 \cdots > y_{n-2} > z_{n-2} > y_{n-1}$ avec $T_n(y_k) = 0$ et $T'_n(z_k) = 0$

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2,\ T'_n \text{ admet } (n-1) \text{ racines réelles distinctes.}}$$

4) Suivant les indications (et avec la notion de la question précédente),
$\varphi_n = t_n \circ \cos$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, par composition.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_n(x) = -\sin(x) \times t'_n(\cos(x)) \quad$ et $\quad \varphi''_n(x) = -\cos(x)t'_n(\cos(x)) + \sin^2(x)t''_n(\cos x)$

Par ailleurs, $\varphi_n(x) = \cos(nx)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_n(x) = -n\sin(nx) \quad \text{et} \quad \varphi''_n(x) = -n^2\cos(nx)$$

Donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -n^2\cos(nx) = -n^2 t_n(\cos x) = \varphi''_n(x) = -\cos(x)t'_n(\cos x) + (1-\cos^2(x))t''_n(\cos x)$

Donc pour tout $y \in [-1, 1]$ ($y = \cos x$)

$$-n^2T_n(y) = (1-y^2)T''_n(y) - yT'_n(y)$$

Ainsi $R = (1-X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n$ admet une infinité de racines (tout $y \in [-1, 1]$), donc $R = 0$.

$$\boxed{\text{Bilan : } T_n \text{ vérifie la relation différentielle : } n^2T_n - XT'_n + (1-X^2)T''_n = 0}$$

5)

Piste de recherche...

Le principe est le suivant :

(a) On écrit chaque polynôme : T_n, T_n' et T_n'' sous forme de somme.

(b) On addition ceux-ci en associant bien ensemble tous les termes associés à X^k (pour tout k)

(c) On identifie avec le polynôme nul : cela donne une relation de récurrence sur les a_k

(d) On essaye de résoudre cette relation de récurrence.

Il est d'un usage très fréquent avec les équations différentielles, en particulier lorsqu'on recherche des solutions de ces équations sous forme de série entière (i.e. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) comme on le fait souvent en seconde année. L'intérêt de cette question est donc de s'entrainer pour ce calcul...

On écrit $T_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$. Bien qu'elle semble infinie, cette somme est bien finie, puisque pour $k > \deg T_n = n$, $a_k = 0$.
On a alors $T_n' = \sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^{k-1}$ et donc $XT_n' = \sum_{k\in\mathbb{N}} k a_k X^k$

Remarques !

Notons que cette somme pourrait commencer à 1, car le premier terme correspondant à $k = 0$ est nul : c'est $0 \times a_0$.

Mais pour faciliter les additions qui vont suivre, on a intérêt à avoir les même valeurs d'indice de somme (cela évite l'étude de cas particuliers pléthoriques)

On a de même $T_n'' = \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^{k-2}$. Donc $X^2T_n'' = \sum_{k\in\mathbb{N}} k(k-1)a_k X^k$,

on a intérêt à noter $1T_n'' = \sum_{h\in\mathbb{N}} (h+2)(h+1)a_{h+2}X^h$ ($h = k-2$ et somme de $k = 2$ à...)

On a donc

$$n^2T_n - XT_n' + (1-X^2)T_n'' = n^2T_n - XT_n' + T_n'' - X^2T_n'' = 0$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(n^2a_k - ka_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k\right)X^k = 0$$

On peut identifier :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad n^2a_k - ka_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k = (n^2-k-k^2+k)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, k < n \qquad a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{k^2-n^2}a_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{(k-n)(k+n)}a_{k+2}$$

(On prend $k < n$, pour que le dénominateur soit non nul. Et que $a_k > 0$, si $k > n$ car $\deg(T_n) = n$).

$$\boxed{\text{On a donc (avec } h = k-2) : \forall\, h \leqslant n,\ a_{h-2} = \frac{h(h-1)}{(h-2-n)(h-2+n)}a_h}$$

On a donc en posant $h = n-2p$: $a_{n-2p-2} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-2p-2)(2n-2p-2)}a_{n-2p} = \dfrac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))}a_{n-2p}$
Puis, en multipliant cette relation (pour p de 0 à $P-1 \leqslant \frac{n}{2}$) on obtient

$$a_{n-2}a_{n-4}\cdots a_{n-2P+2}a_{n-2P} = \prod_{p=0}^{P-1} a_{n-2p-2} = \prod_{p=0}^{P-1}\left(\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(-4)(p+1)(n-(p+1))}a_{n-2p}\right)$$
$$= \frac{n!}{(n-2P)!}\frac{1}{(-4)^P}\frac{1}{P!}\frac{(n-P-1)!}{(n-1)!}\prod_{p=0}^{P-1}a_{n-2p}$$
$$= \frac{n}{(-4)^P(n-P)}\binom{N-P}{P}a_na_{n-2}\cdots a_{n-2P+2}$$

Et donc comme $a_n = 2^{n-1}$ et en simplifiant par $a_{n-2}a_{n-4}\cdots a_{n-2P+2}$, on obtient :

$$\boxed{\forall\, P \leqslant \frac{n}{2},\quad a_{n-2P} = (-1)^P 2^{n-2P-1}\frac{n}{n-P}\binom{N-P}{P}}$$

Partie C

1°) Le cas $\deg P < 1$ correspond à P constant. Si on remplace dans la relation $(*)$, $(X^2-1)Q^2$ doit être constant, donc $Q = 0$ et $P = 1$ ou $P = -1$.

2°) Si (P, Q) est un éventuel couple solution, on a :

$$2\deg P = \deg(1 + (X^2-1)Q^2) = \deg\left((X^2-1)Q^2\right) = 2 + 2\deg Q$$

(car Q n'est pas le polynôme nul et $(X^2-1)Q^2$ n'est pas un polynôme constant)
D'où : $\deg Q = \deg P - 1$, et on peut noter que les coefficients dominants de P et Q sont égaux ou opposés.

3°) Soit toujours (P, Q) un couple solution, en dérivant $(*)$:

$$2PP' = 2XQ^2 + 2(X^2-1)QQ' = 2Q(XQ - (X^2-1)Q')$$

donc Q divise PP'.

D'autre part, la relation $(*)$ écrite sous la forme : $P.P - [(X^2-1)Q].Q = 1$ montre, d'après le théorème de Bézout que P et Q sont premiers entre eux.

Ainsi, d'après le théorème de Gauss, Q divise P'. Or ces deux polynômes ont le même degré donc $P' = \lambda.Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Enfin :

$P = a_n X^n + \cdots, P' = na_n X^{n-1} + \cdots, Q = \pm a_n X^{n-1} + \cdots \implies \lambda = \pm n$

4°) La relation $PP' = (X^2-1)QQ' + XQ^2$ devient alors, en remplaçant P' par $\pm nQ$ et en simplifiant par Q :

$$n^2 P = (X^2-1)(\pm nQ') + X(\pm nQ) = (X^2-1)P'' + XP' \quad (1)$$

Soit, en substituant à X le nombre $\cos\theta$, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$n^2 P(\cos\theta) = -\sin^2\theta.P''(\cos\theta) + \cos\theta.P'(\cos\theta)$$

Ce qui donne, en posant $f(\theta) = P(\cos\theta)$: $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, n^2 f(\theta) = -f''(\theta)$.

Les solutions de cette équation différentielle linéaire sont les fonctions de la forme :

$$f(\theta) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\begin{cases} E : f''(\theta) + n^2 f(\theta) = 0 \\ EC : r^2 + n^2 = 0 \\ EC \text{ a 2 racines : } in \text{ et } -in \\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\theta,\ f(\theta) = e^{0\theta}(\lambda\cos n\theta + i\sin n\theta) \end{cases}$

Or nous ne recherchons que les solutions qui sont des polynômes en $\cos\theta$! On a donc, *a priori*, λ quelconque et $\mu = 0$ ($\theta \mapsto \sin(n\theta)$ ne peut s'exprimer comme polynôme en $\cos\theta$, puisque tout polynôme en $\cos\theta$ est évidemment une fonction paire et que sin est une fonction impaire).

Bilan : si (P, Q) est un couple solution tel que $\deg P = n \geqslant 1$, alors P est de la forme $\lambda.T_n$ et $Q = \pm\frac{1}{n}P' = \pm\lambda.\frac{1}{n}T_n' = \pm\lambda U_n$. Fin de la phase d'analyse

SYNTHESE :

En remplaçant dans $(*)$, le couple $(P, Q) = (\lambda T_n, \pm\lambda U_n)$ est solution si et seulement si :

$$\lambda^2(T_n^2 + (1-X^2)U_n^2) = 1$$

Ce qui donne, d'après I 5) : $\lambda^2 = 1$.

En conclusion, il existe quatre solutions au problème :

$$(T_n, U_n), (-T_n, U_n), (-T_n, U_n), (-T_n, -U_n)$$

Variante : une fois obtenue l'équation différentielle (1), on peut rechercher directement les solutions de (1) polynomiales, pour se rendre compte qu'elles sont proportionnelles à T_n, puis conclure comme dans le bilan précédent ...

Commentaires

A. On a défini le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchébychev de première espèce par

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),$$

on peut aussi le définir par $T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

B. Quand vous aurez vu les espaces vectoriels de dimension finie :

$(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ appelée base des polynômes de Tchébychev. En effet, $(T_0, \ldots, T_n)$ est libre car formée de polynômes de degrés tous différents et comme elle possède $n+1$ éléments, elle est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

*C. Les racines de T_n sont plus denses vers les extremités de $[-1, 1]$ que vers 0. Ce sont les **points dits de Tchébychev d'ordre n**.*

A titre d'exercice, on peut construire sur $[-1, 1]$ les polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ en prenant d'une part pour support d'interpolation $\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ et d'autre part les racines du polynôme de Tchebycheff d'ordre 5. On verra que l'approximation par Tchébichev est meilleure.

D. Pour tout t réel et tout x réel tel que $|x| \leqslant 1$, on démontre (ce sera faisable pour vous l'année prochaine) que $\dfrac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} t^k T_k(x)$.

*E. **Quand** vous aurez vu les produits scalaires :*

On démontre (c'est un calcul que vous pouvez déjà faire si vous avez vu le calcul intégral, bien entendu) que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est nul si $m \neq n$, vaut $\frac{\pi}{2}$ si $m = n \neq 0$ et π si $m = n = 0$. On dit que la famille

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_k, k \geqslant 1\right)$$

est une famille orthonormale par rapport au produit scalaire défini sur l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ par : $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.