Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Vive le vrac !

1. Donner la forme développée le polynôme $(X - e^{\frac{i\pi}{6}})(X - e^{\frac{-i\pi}{6}})$.
2. Soit $f\ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$. Etudiez la convexité de f sur $]1, +\infty[$ puis en déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a > 1$ et $b > 1$, on a $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
3. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < m \leq n$.
   (a) Ecrire la division euclidienne de n par m et en déduire celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
   (b) En déduire le PGCD de $X^n - 1$ et de $X^m - 1$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\sin x \ln(1 + 2x^2)}{x \ln(1 + x)}$ en 0 et de $\dfrac{x \ln(e^x - 1)}{x^2 + 1}$ en $+\infty$.
5. Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.

   (a) Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?

   On suppose désormais que ℓ a cette valeur.

   (b) On admet qu'au voisinage de 0, $x\cos(x) - \sin(x) \sim -\dfrac{x^3}{3}$. Caractériser cette relation de deux manières (l'une fera intervenir une limite et l'autre une relation de négligeabilité).
   (c) En utilisant la question précédente, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.

Exercice 2 : Division de polynômes suivant les puissances croissantes

Dans tout cet exercice, A et B sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :
$A = X^2 + 2X\cos(\theta) + 1$ et $B = X^3 + pX^2 + qX + 1$, où θ, p et q sont des nombres réels.

Préliminaires

1. Calculer p et q en fonction de θ pour que B soit divisible par A.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer M^2 et M^3 et vérifier que $M^4 = I_3$.
   (b) En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$. On distinguera quatre cas.
3. Soit z un nombre complexe différent de -1. Etablir l'égalité $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p z^p + \dfrac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{1+z}$.

Partie I

On suppose dans cette partie que p et q sont des réels quelconques.
Soit $h \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
On suppose qu'il existe un unique couple (Q, R) de $(\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A = BQ + X^{h+1}R,$ et $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_hX^h$.
Les polynômes Q et R sont appelés quotient et reste de la division de A par B suivant les puissances croissantes de X jusqu'à l'ordre h.

1. En écrivant la division de A par B suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 2, déterminer a_0, a_1 et a_2 en fonction de p, q et θ.

2. Pour h et n tels que $3 \leq n \leq h$, déterminer le terme de degré n de $BQ + X^{h+1}R$ et en déduire que $0 = a_n + qa_{n-1} + pa_{n-2} + a_{n-3}$.
3. Pour h et n tels que $3 \leq n \leq h$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_n = AU_{n-1}$.
4. Pour $n \geq 2$, donner l'expression de U_n en fonction de A, n et U_2.

Partie II

On se place dans le cas où B a pour racines -1, i et $-i$.

1. (a) Calculer p, q, a_0, a_1, a_2.
   (b) En déduire la matrice A de la partie I.
   (c) Soit k un entier positif ou nul, exprimer en fonction de θ les valeurs des coefficients a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2} et a_{4k+3} lorsqu'ils existent.
   (d) Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, vérifier que lorsqu'ils existent, $a_{4k} = 1$, $a_{4k+1} = -1$, $a_{4k+2} = 1$ et $a_{4k+3} = -1$. Déterminer le quotient et le reste de la division de A par B suivant les puissances croissantes de X jusqu' à l'ordre $h = N$ où N est un entier supérieur à 3.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ $F = \dfrac{X^2 + 2X\cos\theta + 1}{X^3 + X^2 + X + 1}$
3. Question à ne traiter que si toutes les autres questions du ds ont été traitées.
   En utilisant l'égalité de la partie Préliminaires (question 3) et la question précédente, retrouver les valeurs de a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2} et a_{4k+3}.

Exercice 3 : Dérivées n-ièmes

On considère la fonction numérique f de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Etudier la continuité à gauche et à droite de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{\frac{-1}{x}} \text{ et que}$$
$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x). \qquad (1)$$
5. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.
6. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n. On détaillera soigneusement le raisonnement.
7. On considère la fonction g telle que $\forall x \in]0, +\infty[,\ g(x) = x^2 f(x)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g est $n+1$ fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g^{(n+1)} = f^{(n)}$ sur $]0, +\infty[$.
8. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $g^{(n)}(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ et démontrer que
$$P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x] P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x). \qquad (2)$$