

Semaine du 24/03

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des fonctions Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$. Lien entre ces relations. Notations $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$. La relation $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas

localement. Pour la relation $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, on donne les deux formes $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_{x \rightarrow a} 1$ et $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^b(x)$, x^a , e^{cx} en $+\infty$, de $\ln^b(x)$, x^a en 0. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O . Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f , g , h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} h(x)$, alors $g(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Relations de comparaison : cas des suites Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

Développements limités Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$ à travailler en autonomie.

Calculs d'équivalents et de limites.

Démonstrations :

1. $\diamond$ Réécriture des croissances comparées à l'aide de o (bas page 4 haut page 5)
2. $\diamond$ Formule de Taylor-Young (théorème 1). Pour les élèves $\diamond$ on admettra qu'une primitive sur un voisinage de 0 de $o(x^n)$ est un $o(x^{n+1})$.
3. DL d'une fonction paire, impaire (propr 33)
4. $\diamond$ f admet un DL à l'ordre 0 au voisinage de 0 ssi f admet une limite finie en 0 (propr 35). Soit f une fonction définie en 0. f admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 ssi f est dérivable en 0 (propr 36).
5. unicité du DL de f à l'ordre n en x_0 (propr 31)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).

Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ puis sur l'un des exercices suivants travaillés en classe pendant le cours :

1. obtention du $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sous D7
2. obtention du $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$ sous P39
3. obtention du $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sous P41

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.

Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de

prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus et donner quelques DL de référence en 0 (parmi $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec diverses valeurs de α). Les exercices porteront ensuite sur l'obtention du DL d'un quotient et d'un produit puis sur l'utilisation des DL pour la recherche de limites, d'équivalents de suites, de fonctions, sur la formule de Taylor-Young, sur les relations de domination ou de négligeabilité. La primitivation et la composition des DL n'ont pas encore été vus, ni l'application à l'étude locale d'une fonction ou à la recherche d'asymptote.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon $\diamond$
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin

Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien $\diamond$
Le Gociv Edenn