Semaine du 31/03

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

Développements limités Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. Primitivation d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.
Problèmes d'analyse asymptotique Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équa- tions à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. La notion d'échelle de comparaison est hors programme. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$
Démonstrations :

1. Théorème d'intégration (th2)
2. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur (P42 et P43).
3. $\diamond$ Formule de Stirling (admise pour l'instant). Traduction comme développement asymptotique de $ln(n!)$. Equivalent de $\dbinom{n}{2}$ (exemple bas page 12)
4. $\diamond\diamond$ Obtention du DL à l'ordre $2p+1$ en 0 de Arctan (sous th2)
5. $\diamond\diamond$ Etude des branches infinies de $f \ : \ x \mapsto x\sqrt{\dfrac{4x-1}{x+1}}$ (paragraphe 8.5).

Chapitre 21 : Espaces vectoriels

Espaces vectoriels Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.
Sous-espaces vectoriels Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Démonstrations :

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :
   (a) $0_\mathbb{K}\, x = 0_E$ et $\alpha\, 0_E = 0_E$,
   (b) $-(\alpha x) = \alpha(-x) = (-\alpha)x$,
   (c) $\alpha\, x = 0_E \Longrightarrow (\alpha = 0_\mathbb{K}$ ou $x = 0_E)$
2. $\diamond\diamond$ $\{P \in \mathbb{R}[X],\ (X-2)|P\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et $\{f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\ f$ est croissante$\}$ n'est pas un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$.
Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.

Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite déterminer le DL d'une composée ou obtenir un DL par primitivation puis faire l'étude locale de la courbe. Il devra enfin montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence et qu'un ensemble donné n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. S'il reste du temps, les exercices porteront ensuite sur les applications des développement limités : recherche d'équivalents d'une somme, étude de formes indéterminées, étude d'extrema, étude de branches infinies, développements asymptotiques,...

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon $\diamond\diamond$
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn