PROBLEME

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I. Elles sont FACULTATIVES.

Notations: une fonction de classe C^1 sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I , dont la dérivée f' est continue sur I .

PARTIE I

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

- (a) i. Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
ii. En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

(b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par: $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.

Montrer que ψ est une fonction de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

$$(1) \quad \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par: $S_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$.

- (a) i. Montrer, sans récurrence, que:

$$(2) \quad \forall t \in]0, \pi[, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

- ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

(b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.

PARTIE II

1. (a) Déterminer la limite de $\int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin(2n+1)t \, dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - (b) En déduire la limite de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \, dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

 2. (a) i. Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
 On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par: $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$.
 - ii. Comparer $F\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et I_n .
 - (b) i. Soit x réel, $x \geq \frac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que: $(2n+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$.
 On note $\alpha(x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.
 - ii. Montrer que $\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t} \, dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
 - (c) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ .
3. (a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que: $\left| \int_x^y \frac{\sin t}{t} \, dt \right| \leq \frac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).
 - (b) En déduire que: $\forall x > 0, \quad |\ell - F(x)| \leq \frac{2}{x}$.

PARTIE III

1. (a) Déterminer deux réels α et β , indépendants de n , tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{n^2}.$$

(α et β sont désormais ainsi fixés).

- (b) En déduire que $2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) \, dt$ est un réel indépendant de n , que l'on précisera.
- (c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par: $h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. On définit les suites $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, ($n \geq 1$) et $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$ ($n \geq 0$).

- (a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.
- (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.