

Chapitre 22 : Intégration

Introduction

1 Continuité uniforme

Définition 1 (Continuité uniforme).

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

Exemple : fonctions lipschitziennes.

$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

Théorème 1 (Théorème de Heine).

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

2 Intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

2.1 Fonction en escalier sur $[a, b]$

Définition 2 (Subdivision).

1. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Le **pas de la subdivision** est la longueur maximale entre deux éléments successifs de σ : c'est le $\max\{x_{i+1} - x_i, 0 \leq i \leq n - 1\} > 0$.
3. Soit σ' une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ ssi $\sigma \subset \sigma'$ ssi on obtient σ' en ajoutant à σ des éléments.

Définition 3 (Fonction en escalier).

On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ avec $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Remarque 1. 1. f prend au plus $2n + 1$ valeurs distinctes.

2. f est bornée car elle prend un nombre fini de valeurs.

3. Dans la définition précédente, on dit que σ est adaptée à f ou associée à f .

4. Si σ' est une subdivision plus fine que σ alors σ' est encore associée à f .

5. Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors il existe une subdivision σ'' de $[a, b]$ plus fine que σ et plus fine que σ' .

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

► Exemple : $x \mapsto E(x)$ est en escalier sur tout segment de \mathbb{R} , tandis que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est en escalier sur aucun segment de \mathbb{R} . ($1_{\mathbb{Q}}$, définie sur \mathbb{R} , est la fonction caractéristique de \mathbb{Q} : $1_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon).

Propriété 1.

$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$.

2.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 4 (Intégrale d'une fonction en escalier).

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision associée à f . Soit $\alpha_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ avec $0 \leq i \leq n-1$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_{[a, b]} f$ le réel

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \alpha_i.$$

La définition de l'intégrale est indépendante du choix de la subdivision associée.

► Exemple : Calculer $\int_{[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]} f$ où f est la fonction partie entière.

Propriété 2 (Propriété liée à l'intervalle : relation de Chasles).

Si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ et si $c \in]a, b[$ alors f est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f.$$

De plus par convention, si $a < b$, $\int_{[a, b]} f + \int_{[b, a]} f = \int_{[a, a]} f = 0$ donc $\int_{[a, b]} f = - \int_{[b, a]} f$.

Propriété 3 (Linéarité de l'intégrale).

Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$1. \int_{[a,b]} f + g = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

$$2. \int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

Autrement dit la fonction $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire.

Propriété 4 (Propriétés liées à l'ordre).

Si $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$,

$$1. \text{ Positivité de l'intégrale : si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b], \int_{[a,b]} f \geq 0.$$

$$2. \text{ Croissance de l'intégrale : si } f \geq g \text{ sur } [a, b], \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$$

$$3. \text{ Inégalité de la valeur absolue : } |f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

3.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 5 (Fonction continue par morceaux).

Soit f une application de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

1. f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.

2. f est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i définie et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$. Cela signifie qu'elle admet une limite finie à droite en x_i et à gauche en x_{i+1} .

► Exemple : La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$.

On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque 2. Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Propriété 5.

Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Propriété 6.

$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

$(\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$.

Problème : comment définir $\int_{[a,b]} f$ lorsque f est continue par morceaux sur $[a, b]$? On veut trouver $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$. Il faut que $\int_{[a,b]} \varphi_1 \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \varphi_2$ si l'on veut conserver les propriétés liées à l'ordre. L'idée est la suivante : trouver φ_1 et φ_2 telles que $\int_{[a,b]} \varphi_1$ et $\int_{[a,b]} \varphi_2$ se rapprochent l'une de l'autre, aussi près que possible.

Théorème 2 (Approximation des fonctions continues par morceaux).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \quad \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, et $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$ sur $[a, b]$.

On retient que l'on peut encadrer une fonction continue par morceaux d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier. Exemple de graphe de fonctions en escalier encadrant f à ε près.

3.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. On note :

$$\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) ; \varphi \leq f\}.$$

$$\mathcal{E}^+(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) ; f \leq \varphi\}.$$

et on définit :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\}$$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$$

Théorème 3 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

On conserve les notations précédentes.

$I^-(f)$ et $I^+(f)$ existent et on a $I^-(f) = I^+(f)$.

On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f$ le réel $I^-(f) = I^+(f)$.

Extension de la notation $\int_a^b f(t)dt$ au cas où $b \leq a$.

Si f est en escalier sur $[a, b]$ alors elle est continue par morceaux et son intégrale en tant que fonction continue par morceaux égale sont intégrale en tant que fonction en escalier. En effet, soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, $\forall \varphi_1 \in \mathcal{E}^-(f)$, $\int_{[a,b]} \varphi_1 \leq \int_{[a,b]} f$, donc $\int_{[a,b]} f$ est un majorant de $\{\int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$ et de plus, $\int_{[a,b]} f \in \{\int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\}$, donc $\sup \{\int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\} = \int_{[a,b]} f$.

Propriété 7 (Propriété liée à l'intervalle : relation de Chasles).

Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$ et si $c \in]a, b[$ alors f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Propriété 8 (Lemme).

Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ avec $|f - \varphi| \leq \varepsilon$, alors $\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq \varepsilon(b-a)$.

Ce lemme sert à montrer la propriété suivante :

Propriété 9 (Linéarité de l'intégrale).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$1. \int_{[a,b]} f + g = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

$$2. \int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

Autrement dit la fonction $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire.

Propriété 10 (Propriétés liées à l'ordre).

Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

$$1. \text{ Positivité de l'intégrale : si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b], \int_{[a,b]} f \geq 0.$$

$$2. \text{ Croissance de l'intégrale : si } f \geq g \text{ sur } [a, b], \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$$

$$3. \text{ Inégalité de la valeur absolue : } |f| \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

Propriété 11 (Cas des fonctions paires, des fonctions impaires).

Soit a un réel strictement positif et $f \in \mathcal{CM}([-a, a], \mathbb{R})$.

$$- \text{ Si la fonction } f \text{ est paire alors } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

$$- \text{ Si la fonction } f \text{ est impaire alors } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Propriété 12 (Invariance de l'intégrale par translation).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}; f_\alpha : x \mapsto f(x - \alpha)$.

$f_\alpha \in \mathcal{CM}([a + \alpha, b + \alpha], \mathbb{R})$ et on a

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a+\alpha, b+\alpha]} f_\alpha$$

Application : Si f est T -périodique, alors $\int_{[a, a+T]} f = \int_{[0, T]} f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3.3 Valeur moyenne, inégalité de la moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. Donc $\exists m, M \in \mathbb{R}$ $m \leq f \leq M$, et $m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f \leq M(b-a)$.

Définition 6.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, avec $a < b$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a, b]$ le réel $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$; on a donc

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M$$

Propriété 13 (Inégalité de la moyenne).

Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \times (b-a).$$

4 Cas des fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a < b$ **Propriété 14.**

Une fonction **continue** et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est nulle sur $[a, b]$ si et seulement si son intégrale est nulle sur $[a, b]$.

Propriété 15 (Inégalité de Cauchy - Schwarz).

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\left[\int_{[a,b]} f \times g \right]^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \cdot \int_{[a,b]} g^2.$$

Il y a égalité ssi f et g sont proportionnelles sur $[a, b]$.

Remarque 3. La fonction $(\cdot, \cdot) : (\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, c'est-à-dire une forme bilinéaire, symétrique, définie positive. Voir chapitre ultérieur.

► Méthode : L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être très utile pour montrer une inégalité comportant une intégrale.

► Exemple : Soit $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$

$$\left(\int_{[1,x]} f \right)^2 \leq \frac{e^{2x} - e^2}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

5 Sommes de Riemann**Définition 7 (Somme de Riemann).**

Soit f une application continue sur $[a, b]$ et soit $\sigma = (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une subdivision de $[a, b]$. On désigne par ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et on note $\zeta = (\zeta_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$. On appelle somme de Riemann associée à f, σ et ζ le réel

$$S(f, \sigma, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\zeta_i)$$

Interprétation géométrique de la somme de Riemann $S(f, \sigma, \zeta)$: cette somme de Riemann est l'intégrale de la fonction en escalier φ définie par $\varphi(x) = f(\zeta_i)$ pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Pour une subdivision **uniforme** (on dit aussi régulière) de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ en prenant $\zeta = (x_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

. En prenant $\zeta = (x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

. En prenant $\zeta = \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$, on obtient la somme de Riemann notée

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème 4 (Convergence d'une somme de Riemann).

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f.$$

Ce résultat est admis. Les sommes de Riemann constituent donc des approximations de l'intégrale d'une fonction **continue** sur un segment. L'approximation d'une intégrale par l'une des sommes R_n , S_n ou T_n s'appelle **méthode des rectangles**. L'approximation par la somme $U_n = \frac{R_n + S_n}{2}$ s'appelle **méthode des trapèzes**.

Ce théorème permet de déterminer la limite d'une suite dont le terme général est de la forme $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \frac{b-a}{n})$ où f est une fonction **continue** sur $[a, b]$. Elle converge vers $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$.

► Exemple : Soit $(S_n)_n$ la suite de terme général $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$. Montrons que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

Considérons l'application f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, en effectuant le changement d'indice $i = k - n$ avec $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

On en déduit que S_n est la somme de Riemann associée à la fonction f pour une subdivision $\sigma = (\frac{i}{n})_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$. D'après le théorème, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On en conclut que la suite de terme général S_n converge et que sa limite est $\frac{1}{2}$. Remarquons que la fonction f considérée n'est pas unique. On peut également faire intervenir pour le calcul l'application f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Propriété 16 (Cas d'une fonction lipschitzienne).

Soit f une application λ -lipschitzienne sur $[a, b]$ (donc continue sur $[a, b]$), soit $\sigma = (x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ une subdivision régulière de $[a, b]$, ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\zeta = (\zeta_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \zeta) \right| \leq \frac{\lambda(b-a)^2}{n}$.

► Exemple : Si $f = \ln$ (fonction 1-lipschitzienne sur $[1, 2]$ car de dérivée bornée par 1) alors $\left| \int_{[1,2]} f - Rn(f) \right| \leq \frac{1}{n}$.

Pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale, il suffit de prendre $n = 100$. Si le pas tend vers 0, les sommes de Riemann d'une fonction lipschitzienne sont aussi proches que l'on veut de son intégrale.

6 Primitive et intégrale

6.1 Primitives

Définition 8.

Soient $f : I \rightarrow K$ et $F : I \rightarrow K$. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I .

Propriété 17.

Soit $f : I \rightarrow K$ et F une primitive de f sur I .

Soit $G : I \rightarrow K$.

G est une primitive de f sur I ssi $\exists c \in \mathbb{R}$, $G = F + c$ sur I .

Autrement dit l'ensemble \mathcal{P} des primitives de f sur I est le sous-espace affine de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ dirigé par le sous-espace vectoriel des applications constantes de I sur \mathbb{K} : $\mathcal{P} = \{G = F + \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6.2 Lien entre primitives et intégrale de f

Théorème 5 (Théorème fondamental reliant intégration et dérivation).

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.
 Les primitives de f sur $[a, b]$ sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
 On note $\int f(t) dt = F + c$ où $F = \int_a^x f(t) dt$.

Conséquence : toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Propriété 18.

Plus précisément, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

► Exemple : Montrer que $H : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t^2)}$ est constante sur $]1, +\infty[$.

6.3 Calcul d'une intégrale

Propriété 19.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.
 Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Propriété 20.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$.

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a).$$

7 Formule de Taylor

Théorème 6 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en un point a de I).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . Soit $a \in I$. $\forall x \in I$,

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{\text{partie principale } T_n(x)} + \underbrace{\int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt}_{\text{reste intégral de Lagrange } R_n(x)}.$$

Remarque 4. — Pour $n = 0$ le résultat est déjà connu : si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

$$- T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Démonstration : par récurrence avec une intégration par parties.

Théorème 7 (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . Soit $(a, b) \in I^2$. Si M est un majorant de la fonction $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[\min(a, b), \max(a, b)]$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

: cas particulier $n = 0$.

8 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes**Définition 9.**

Soit f une application de $[a, b]$ dans \mathbb{C} . On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

1. f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.
2. f est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i définie et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Propriété 21.

Une fonction à valeurs complexes est continue par morceaux ssi ses parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux.

Définition 10 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes).

Lorsque $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Conséquence : la propriété de linéarité, la relation de Chasles, l'inégalité du module et l'inégalité de la moyenne sont étendues aux fonctions à valeurs complexes.