TD 22 : Intégration

► Exercice 1 : Déterminer la limite des suites dont le terme général est donné, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned} - u_n &= \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right), \\ - u_n &= n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right), \\ - u_n &= \left(\left(1 + \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right) \dots \left(1 + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

► Exercice 2 : Prouver sans étude de fonction que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

► Exercice 3 :

1. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ est majorée par e^x pour tout $x \geq 0$. En déduire la convergence de cette suite.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
3. Aurait-on pu montrer ce résultat avec la formule de Taylor-Young ?
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

► Exercice 4 :

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et donner sa limite.
3. Préciser à partir de quel indice n on peut affirmer que u_n est une approximation de cette limite à 10^{-3} près.
4. Comment approcherait-on $\ln 4$ et $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$?

► Exercice 5 (réf. 7) : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

► Exercice 6 (réf. 8) : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Montrer que $|\int_a^b f(t) dt| = \int_a^b |f(t)| dt \Leftrightarrow (f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0)$.

► Exercice 7 (réf. 9) : Soit E l'espace vectoriel des fonctions 2π -périodiques, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$. On considère $f \in E$ telle que l'on ait pour tout $g \in E$, $\int_0^{2\pi} f(t)g''(t) dt = 0$. Montrer que f est constante.

► Exercice 8 (réf. 10) : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

► Exercice 9 (réf. 13) : On a établi dans le cours la formule de Taylor avec reste intégral : soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, K)$ et $a, b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Obtenir une autre expression pour le reste intégral :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (b-a)u) du \quad (\text{poser } u = \frac{t-a}{b-a}).$$

► Exercice 10 (réf. 6) : Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

► Exercice 11 (réf. 14) : Soit f une fonction continue $[a, b]$, F la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a . Soit u une fonction définie sur I à valeurs dans $[a, b]$.

$$\forall x \in I, \text{ on définit } G(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt.$$

Alors $G(x) = F(u(x)) = F \circ u(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que si u est continue sur I alors G est continue sur I .
2. Montrer que si u est dérivable sur I alors G est dérivable sur I et $\forall x \in I, G'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f \circ u(x) \cdot u'(x)$.
3. Soit $G(x) = \int_x^{x^2} \ln(t) dt$. On étudie G sur $[1, +\infty)$. Calculer $G'(x)$ pour $x \geq 1$.

► Exercice 12 (réf. 15) : Calculer la dérivée de la fonction :

$$F : t \mapsto \int_{-\tan t}^{\operatorname{sh} t} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$