Semaine du 22/04

Chapitre 21 : Espaces vectoriels

Espaces vectoriels Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.
Sous-espaces vectoriels Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de R^3. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A. Notations Vect(A), Vect$(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient Vect(A).
Somme de deux sous-espaces Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Sous-espaces supplémentaires.

Démonstrations :

1. ⋄⋄ L'intersection de deux sev de E est un sev de E (propr 5)
2. ⋄ Vect(A) est l'ensemble des combinaisons linéaires de A dans le cas où A est une partie finie de E (propr 7)
3. ⋄⋄ Deux sev de E E_1 et E_2 sont en somme directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ (propr 10).
4. Si F et G sont deux sev de E alors $F+G =$Vect$(F \cup G)$.

Chapitre 22 : Intégration

Continuité uniforme Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes. Théorème de Heine.
Fonctions continues par morceaux Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux. Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$. Interprétation géométrique de l'intégrale. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale ou inégalité de la valeur absolue. Relation de Chasles. Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période. Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Sommes de Riemann Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, on a lorsque $n \to +\infty$, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
Lien entre intégrale et primitive Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour f continue.
Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives

Formules de Taylor globales Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Démonstrations :

1. ⋄ Soit f une application λ-**lipschitzienne** sur $[a, b]$ (donc continue sur $[a, b]$), soit $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision régulière de $[a, b]$, ζ_i un élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ et $\zeta = (\zeta_i)_{i\in\{0,\dots,n-1\}}$.
   Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle |\int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \zeta)| \leq \frac{\lambda(b-a)^2}{n}$. (propr 16)

2. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. On note $\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ \varphi \leqslant f\}$, $\mathcal{E}^+(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ f \leqslant \varphi\}$, $I^-(f) = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi\ ;\ \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}$ et $I^+(f) = \inf\left\{\int_{[a,b]} \varphi\ ;\ \varphi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}$
   $I^-(f)$ et $I^+(f)$ existent et on a $I^-(f) = I^+(f)$.
   On appelle <u>intégrale de f sur le segment $[a,b]$</u> et on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f$ le réel $I^-(f) = I^+(f)$(théorème 3)

Les élèves qui devaient avoir colle lundi 21 avril doivent envoyer un message à leur colleur pour demander à décaler la colle un autre jour de la semaine. Passez par le cahier de prépa (icône enveloppe) pour contacter le colleur.

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ et sur l'un des exercices suivants :

— Soit $(S_n)_n$ la suite de terme général $S_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$. Montrer que cette suite converge vers $\dfrac{1}{2}$, sous Th4

— Calculer $\displaystyle\int_{\left[-\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right]} f$ où f est la fonction partie entière, sous D4

— Montrer que $H\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t^2)}$ est constante sur $]1,+\infty[$, sous P18

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite montrer que deux sous-espaces vectoriels donnés sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires, reconnaître une somme de Riemann et déterminer sa limite. Les exercices porteront ensuite sur les espaces vectoriels (opérations sur les espaces vectoriels, exercices plus théoriques...) ou porter sur les formules de Taylor globales, sur le lien entre intégrale et primitive...

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon $\diamond\diamond$
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn