MPSI DM 11 cor
Merci à Olivier Halgand pour ce corrigé

**PARTIE I.**

**1°) a) i)** On connaît le développement limité de sin en 0 :

$$\sin t \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5),$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin t} &\underset{0}{=} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^4)\right)} \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{t}\left(1 - \left(-\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!}\right) + \left(-\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!}\right)^2 + o(t^5)\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + \frac{t^4}{(3!)^2} + o(t^5)\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{t} + \frac{t}{6} + \frac{7t^3}{360} + o(t^4).
\end{aligned}$$

*car :* $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$

On en déduit donc :

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \underset{0}{=} -\frac{t}{6} - \frac{7t^3}{360} + o(t^4).}$$

**ii)** La fonction $\varphi$ est continue et dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ par quotient et somme de fonctions qui le sont. De plus : $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0 = \varphi(0)$, donc $\varphi$ est continue en 0. Enfin, puisque $\varphi$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, $\varphi$ est dérivable en 0 :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue et dérivable sur } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ et : } \varphi'(0) = -\tfrac{1}{6}.}$$

**b)** La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ par quotient et somme de fonctions qui le sont. De plus, $\varphi$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

**c)** Par définition, on a donc : $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \psi(t) = 1 - t\varphi(t)$. Puisque $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il en est de même de $\psi$ par produit et somme. Enfin, on peut écrire :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \psi'(t) = -\varphi(t) - t\varphi'(t),$$

donc :

$$\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ et : } \psi'(0) = -\varphi'(0) = \tfrac{1}{6}.}$$

**2°)**Les fonctions $g$ et sin étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \left[g(t)\cdot\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \int_a^b g'(t)\frac{-\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{g(a)\cos(\lambda a)-g(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, en notant $M = \sup\limits_{t\in[a,b]}\left|g(t)\right| = \max\limits_{t\in[a,b]}\left|g(t)\right|$ (puisque $g$ est continue sur le segment $[a,b]$) et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left|g(a)\cos(\lambda a)-g(b)\cos(\lambda b)\right| \leqslant \left|g(a)\right|\left|\cos(\lambda a)\right| + \left|g(b)\right|\left|\cos(\lambda b)\right| \leqslant 2M.$$

De même, en notant $M' = \max\limits_{t\in[a,b]}\left|g'(t)\right|$ (puisque $g$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, $g'$ y est continue) :

$$\left|\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|g'(t)\right|\left|\cos(\lambda t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M'\,\mathrm{d}t = M'(b-a).$$

Il s'ensuit que :

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2M+M'(b-a)}{\lambda} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.} \tag{1}$$

**3°) a) i)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]0,\pi[$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos(2kt) &= \sum_{k=1}^n \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2ikt}\right) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{e}^{2it}\right)^k\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2it}\cdot\frac{1-\left(\mathrm{e}^{2it}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2it}}\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2it}\cdot\frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-int}-\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{-it}-\mathrm{e}^{it}}\right)\\ &= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i(n+1)t}\cdot\frac{-2i\sin(nt)}{-2i\sin t}\right)\\ &= \frac{\cos\big((n+1)t\big)\sin(nt)}{\sin t}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\big((2n+1)t\big)-\sin t}{\sin t}\\ &= \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{2\sin t} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

*en reconnaissant une somme géométrique de raison* $\mathrm{e}^{2it}\neq 1$

*en utilisant l'« angle moitié »*

et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\,]0,\pi[,\quad S_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}.} \tag{2}$$

**ii)** Pour $t=0$ et $t=\pi$, on a : $\forall k\in\mathbb{N},\ \cos(2kt)=1$ donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n(0)=S_n(\pi)=1+2n.}$$

**b)** D'après **I.3°)a)** on a : $\lim\limits_{t\to 0} S_n(t) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(2n+1)t}{t} = 2n+1 = S_n(0)$ donc $S_n$ est continue en 0. De même, en posant $t=\pi-u$ :

$$S_n(\pi-u) = \frac{\sin\big((2n+1)(\pi-u)\big)}{\sin(\pi-u)} = \frac{\sin(\pi-(2n+1)u)}{\sin(\pi-u)} = \frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 2n+1,$$

donc $S_n$ est continue en 1. Ainsi l'intégrale $J_n$ est bien définie et on peut écrire :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\pi/2} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\pi/2} \cos(2kt)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\pi/2}, \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

**<u>PARTIE II.</u>**

**1°) a)** Puisque $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors d'après **I.2°)** :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

**b)** Comme précédemment : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} = 2n+1$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc l'intégrale $I_n$ est bien définie. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin\big((2n+1)t\big)\left(\varphi(t) + \frac{1}{\sin t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, dans cette dernière somme, le premier terme tend vers 0 d'après **II.3°)b)**, et le second terme n'est autre que $J_n = \frac{\pi}{2}$ d'après **II.1°)a)**, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.}$$

**2°) a) i)** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on sait que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en une fonction continue sur } \mathbb{R}.}$$

**ii)** On effectue le changement de variable : $t = (2n+1)u$, ce qui donne :

$$F\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{(2n+1)u}\,\big((2n+1)\,\mathrm{d}u\big),$$

d'où :

$$\boxed{F\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = I_n.}$$

**b) i)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, de premier terme $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et de limite $+\infty$. On en déduit que la famille d'intervalles $\big([u_n, u_{n+1}[\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et donc :

$$\boxed{\text{il existe un unique entier } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (2n+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\frac{\pi}{2}.}$$

**ii)** Avec le changement de variable $u = t - (2n+1)\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x-\alpha(x)} \frac{\sin\left(u + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{u + (2n+1)\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}u,$$

donc :

$$\left|\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{x-\alpha(x)} \frac{\left|\sin\left(u + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|}{|u + (2n+1)\frac{\pi}{2}|}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{x-\alpha(x)} \frac{\mathrm{d}u}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \leqslant \frac{\pi}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2n+1},$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

**c)** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\alpha(x)} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= I_n + \int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{II.2°)a)ii)}}$$

Or, lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $n$ tend aussi vers $+\infty$ donc, d'après **II.2)°b)** et **II.2°)b)ii)** :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

**3°) a)** Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $0 < x < y$. Alors, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_x^y - \int_x^y (-\cos t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y}\right) - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\frac{\cos x}{x}\right| + \left|\frac{\cos y}{y}\right| + \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \left[-\frac{1}{t}\right]_x^y,$$

soit :

$$\boxed{\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{x}.}$$

**b)** Toujours avec $0 < x < y$, on a :

$$\left|F(y) - F(x)\right| = \left|\int_0^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{x}.$$

Donc, en faisant tendre $y$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \left|\frac{\pi}{2} - F(x)\right| \leqslant \frac{2}{x}.}$$

## <u>PARTIE III.</u>

**1°) a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[(\alpha t + \beta t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\alpha + 2\beta t)\frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \left[(\alpha + 2\beta t)\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\beta\,\frac{-\cos(nt)}{n^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(\alpha + 2\beta\pi)(-1)^n - \alpha}{n^2} - \frac{2\beta}{n^3}\Big[\sin(nt)\Big]_0^\pi \\ &= \frac{(\alpha + 2\beta\pi)(-1)^n - \alpha}{n^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \iff \left(\alpha = -1 \text{ et } \ \beta = \frac{1}{2\pi}\right).}$$

**b)** On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{6\pi} + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.}$$

**c)** La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi]$. De plus :

$$h(t) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-t}{\frac{t}{2}} = -2,$$

donc $f$ est prolongeable par continuité en 0 et posant : $h(0) = -2$. Plus précisément :

$$\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \underset{0}{=} \frac{1}{\frac{t}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \mathrm{o}(t^3)} \underset{0}{=} \frac{2}{t}\cdot\frac{1}{1 - \frac{t^2}{24} + \mathrm{o}(t^2)} \underset{0}{=} \frac{2}{t}\left(1 + \frac{t^2}{24} + \mathrm{o}(t^2)\right) = \frac{2}{t} + \frac{t}{12} + \mathrm{o}(t),$$

donc :

$$h(t) \underset{0}{=} \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{12} + \mathrm{o}(t)\right)\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \underset{0}{=} -2 + \frac{t}{\pi} + \mathrm{o}(t),$$

Ainsi, puisque $h$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0

$$\boxed{h \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0, \pi] \text{ avec : } h(0) = -2 \text{ et } h'(0) = \tfrac{1}{\pi}.}$$

**2°) a)** D'après **III.1°)b)**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n = \frac{\pi^2}{3} + \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} + \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$

donc, avec le changement de variable $t = 2u$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n = \frac{\pi^2}{3} + 2\int_0^{\pi/2} h(2u)\sin u\, S_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{3} + 2\int_0^{\pi/2} h(2u)\sin\big((2n+1)u\big)\,\mathrm{d}u.$$

Or, d'après (1), cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = u_{2n+1} - \frac{1}{4}\,u_n.$$

Donc, d'après **III.2°)a)** :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.}$$