Exercice 1

① $(X-e^{\frac{i\pi}{6}})(X-e^{-\frac{i\pi}{6}}) = X^2 - (e^{\frac{i\pi}{6}}+e^{-\frac{i\pi}{6}})X + e^{\frac{i\pi}{6}}e^{-\frac{i\pi}{6}} = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}})X + 1$

$\boxed{(X-e^{\frac{i\pi}{6}})(X-e^{-\frac{i\pi}{6}}) = X^2 - \sqrt{3}X + 1}$ puisque $\mathrm{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② Soit $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(\ln x)$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

$\forall x>1,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ (car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln x$)

$\forall x>1,\ f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x}\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{-\frac{1}{x^2}(\ln x+1)}{(\ln x)^2}$; car $x>1 \Rightarrow \ln x>0$

Soit $x>1$

Comme $-\frac{1}{x^2}<0$, $(\ln x)^2>0$ et $(\ln x+1)>0$, on a $f''(x)<0$

Donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]1,+\infty[}$

Soit $a>1$ et $b>1$ comme f est concave sur $]1,+\infty[$, on a (avec $\alpha=\frac{1}{2}$, $1-\alpha=\frac{1}{2}$)

$\ln\left(\ln\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln a) + \frac{1}{2}\ln(\ln b)$

$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln(\ln a)^{\frac{1}{2}} + \ln(\ln b)^{\frac{1}{2}}$

$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln\left((\ln a)^{\frac{1}{2}}\times(\ln b)^{\frac{1}{2}}\right)$

$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln(\ln a\ln b)^{\frac{1}{2}}$ $\Big\}$ on compose avec exp

or exp est croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a\ln b}}$$

③ Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tq $0<m\leq n$

ⓐ il existe un unique couple d'entier $(q,r)\in\mathbb{N}^2$ tq $n = mq+r$ avec $0\leq r<m$

$X^n - 1 = X^{mq+r} - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{mq}-1) + X^r - 1$

or $X^{mq}-1 = (X^m)^q - 1^q \underset{\text{formule } a^n-b^n}{=} (X^m-1)\sum\limits_{k=0}^{q-1}(X^m)^k 1^{q-k-1} = (X^m-1)\sum\limits_{k=0}^{q-1}X^{mk}$

Donc $\boxed{X^n - 1 = (X^m-1)\sum\limits_{k=0}^{q-1}X^{mk+r} + X^r - 1}$.

De plus $0\leq r<m$ donc le polynôme X^r-1 est de degré strictement inférieur à $\deg(X^m-1)$ donc on a bien écrit la division euclidienne de X^n-1 par X^m-1.

(b) on sait que si $A = BQ+R$ alors $A\wedge B = B\wedge R$

donc $(X^n-1)\wedge(X^m-1) = (X^m-1)\wedge(X^r-1)$ $(*)$

Si on appelle (r_k) et (q_k) la suite des restes et la suite des quotients dans l'algorithme des divisions successives d'Euclide pour trouver le PGCD de n et de m, alors si r_p est le dernier reste non nul $r_p = n\wedge m$. On précise que $n = r_0$ et $m = r_1$ - On a : $r_k = q_{k+1}r_{k+1} + r_{k+2}$ $\forall k$

En répétant $(*)$ on obtient :

$$(X^n-1)\wedge(X^m-1) = (X^{r_0}-1)\wedge(X^{r_1}-1) = (X^{r_1}-1)\wedge(X^{r_2}-1) = \dots = (X^{r_{p-1}}-1)\wedge(X^{r_p}-1)$$
$$= (X^{r_p}-1)\wedge(X^0-1) = X^{r_p}-1.$$

Donc $\boxed{(X^n-1)\wedge(X^m-1) = X^{n\wedge m}-1}$

(4) • $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$ donc $\ln(1+2x^2)\underset{0}{\sim} 2x^2$ car $\lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$.

$x \underset{0}{\sim} x$ donc par produit $\sin x \ln(1+2x^2) \underset{0}{\sim} x\times 2x^2$

$$x\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x\times x$$

et par quotient $\dfrac{\sin x\ln(1+2x^2)}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x^3}{x^2}$ donc $\boxed{\dfrac{\sin x\ln(1+2x^2)}{x\ln(1+x)}\underset{0}{\sim} 2x}$

• $x \underset{+\infty}{\sim} x$, $x^2+1\underset{+\infty}{\sim} x^2$ $\ln(e^x-1) = \ln\left(e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$

or $\ln(e^x) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors que $\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) = \ln(1-e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\ln(e^x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(e^x)$ et $\ln(e^x) = x$

Donc $x\ln(e^x-1)\underset{+\infty}{\sim} x\times x$ et $\dfrac{x\ln(e^x-1)}{x^2+1}\sim\dfrac{x^2}{x^2}$ donc $\boxed{\dfrac{x\ln(e^x-1)}{x^2+1}\underset{+\infty}{\sim} 1}$

(5) (a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc f est continue à droite en 0 ssi $f(0)=1$ ssi $\boxed{l=1}$

(b) $x\cos x - \sin x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$ ssi $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{-\frac{x^3}{3}} = 1}$

ssi $x\cos x - \sin x = -\dfrac{x^3}{3} + o\left(-\dfrac{x^3}{3}\right)$

ssi $\boxed{x\cos x - \sin x = -\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}$

(c) f est définie sur $\mathbb{R}$ et f est continue en 0 d'après (a) et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \dfrac{\cos x\times x - \sin x}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{x^2}$ donc $f'(x)\underset{0}{\sim} -\dfrac{x}{3}$

or $\lim_{x\to 0^+} -\dfrac{x}{3} = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} f'_+(x) = 0$ donc par le <u>théorème de la limite de la dérivée</u>, f est dérivable à droite en 0 et $\boxed{f'_d(0) = 0}$

De plus f' est continue en 0 puisque $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'_d(0)$ donc

<u>f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$</u>

Exercice 2

Préliminaires

① B est divisible par A ssi le reste dans la division euclidienne de B par A est nul.

voici la division euclidienne de B par A :

$$\begin{array}{l|l} X^3 + pX^2 + qX + 1 & X^2 + 2X\cos\theta + 1 \\ \underline{X^3 + 2X^2\cos\theta + X} & \hline (p-2\cos\theta)X^2 + (q-1)X + 1 & X + (p-2\cos\theta) \\ \underline{(p-2\cos\theta)X^2 + 2X\cos\theta(p-2\cos\theta) + p - 2\cos\theta} & \\ (q-1-2\cos\theta(p-2\cos\theta))X + 1 - p + 2\cos\theta & \end{array}$$

le reste est nul ssi $q-1-2\cos\theta(p-2\cos\theta)=0$ et $1-p+2\cos\theta=0$

ssi $p = q = 1+2\cos\theta$

Donc B est divisible par A ssi $p=q=1+2\cos\theta$

②

ⓐ $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3}$

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 4k$ alors $M^n = (M^4)^k = I_3^k = \underline{I_3}$

s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 4k+1$ alors $M^n = M^{4k+1} = M^{4k}M = \underline{M}$

s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 4k+2$ alors $M^n = M^{4k+1+1} = M^{4k+1}M = \underline{M^2}$

s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 4k+3$ alors $M^n = M^{4k+2+1} = M^{4k+2}M = \underline{M^3}$

③ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p z^p = \sum_{p=0}^{n} (-z)^p = \frac{(-z)^0 - (-z)^{n+1}}{1-(-z)}$$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $-z \neq 1$)

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p z^p = \frac{1-(-1)^{n+1}z^{n+1}}{1+z} = \frac{1}{1+z} - \frac{(-1)^{n+1}z^{n+1}}{1+z}$$

Donc $$\boxed{\frac{1}{1+z} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p z^p + \frac{(-1)^{n+1}z^{n+1}}{1+z}}$$

Partie I

(1) il existe un unique couple $(Q,R)\in(\mathbb{R}[X])^2$ tq $A=BQ+X^3R$ et $Q=a_0+a_1X+a_2X^2$

$BQ+X^3R=(X^3+pX^2+qX+1)(a_0+a_1X+a_2X^2)+X^3R$

$=a_0X^3+a_1X^4+a_2X^5+a_0pX^2+a_1pX^3+a_2pX^4+qa_0X+a_1qX^2+a_2qX^3+a_0+a_1X+a_2X^2+X^3R$

$BQ+X^3R=a_0+(a_1+qa_0)X+(a_2+a_1q+a_0p)X^2+S$

où $S=a_0X^3+a_1X^4+a_2X^5+a_2pX^4+X^3R$

Puisque A et $BQ+X^3R$ sont égaux, on identifie les coefficients des termes

- de degré 0 donc $a_0=1$ (car $A=1+2X\cos\theta+X^2$)
- de degré 1 donc $a_1+qa_0=2\cos\theta$
- et de degré 2 donc $a_2+a_1q+a_0p=1$

Ainsi on obtient $a_0=1$, $a_1=2\cos\theta-q$ et $a_2=1-(2\cos\theta-q)q-p$

$\boxed{a_0=1,\ a_1=2\cos\theta-q \quad \text{et} \quad a_2=1-p-2\cos\theta q+q^2}$

(2) Soit h et n tels que $3\le n\le h$

Le terme de degré n de $BQ+X^{h+1}R$ est : $(a_n+a_{n-1}q+a_{n-2}p+a_{n-3})X^n$

puisque $X^{h+1}R$ est un polynôme de degré $\deg(X^{h+1})+\deg R\geq h+1$ si R est non nul or $h\geq n$ donc $h+1>n$.

donc le terme de degré n de :

- le terme de degré n de BQ est le terme de degré n de $(1+qX+pX^2+X^3)(a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_hX^h)$ avec $h\geq n$

or quand on développe ce produit, 4 termes sont de deg n :

a_nX^n, $a_{n-1}qX^{n-1}X$, $a_{n-2}pX^{n-2}X^2$ et $a_{n-3}X^{n-3}X^3$

Par ailleurs puisque $n\geq 3$, le terme de degré n de A est nul

Donc $\boxed{0=a_n+q\,a_{n-1}+p\,a_{n-2}+a_{n-3}}$

(3) Soit $n\geq 3$

on propose $\boxed{A=\begin{pmatrix}-q & -p & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$. On vérifie bien que $\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\\a_{n-3}\end{pmatrix}$

car $a_n=-q\,a_{n-1}-p\,a_{n-2}-a_{n-3}$

$a_{n-1}=1\,a_{n-1}$

$a_{n-2}=1\,a_{n-2}$

(4) Soit $n\geq 2$. Montrons par récurrence que "$U_n=A^{n-2}U_2$" : $\mathcal{P}(n)$

initialisation : si $n=2$ alors $U_2=A^0U_2$ car $A^0=I_2$ donc $\mathcal{P}(2)$ vraie

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n fixé $(n\geq 2)$

$U_{n+1}=AU_n$ d'après (3)

donc $U_{n+1}=AA^{n-2}U_2=A^{n-1}U_2=A^{(n+1)-2}U_2$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

Concl $\boxed{\forall n\geq 2\quad \mathcal{P}(n) \text{ vraie}}$

Partie II

① ⓐ B est un polynôme de degré 3 et unitaire (puisque $B = X^3+pX^2+qX+1$)

Il a pour racines -1, i et $-i$ donc $B = (X+1)(X-i)(X+i)$

Par les formules de Viète on a : • $\sigma_1 = -1-i+i = (-1)^1 \frac{a_2}{a_3} = -\frac{p}{1} = -p$

• $\sigma_2 = (-1)\times(-i) + (-1)\times i + (-i)\times i = (-1)^2 \frac{a_1}{a_3} = q$

(• $\sigma_3 = -1\times(-i)\times i = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3} = -1$ OK)

Ainsi $q = -1\times(-i) + (-1)\times i + (-i)\times i = i - i + 1 = 1$

et $-p = -1-i+i = -1$ donc $p = 1$ $\boxed{p=q=1}$

Déterminons a_0, a_1 et a_2 à l'aide de la q I①: $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 2\cos\theta - 1,\ a_2 = 1-2\cos\theta}$

ⓑ la matrice A est la matrice M des préliminaires :

$\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ On a donc $A^n = I_3$ si $n \equiv 0\,[4]$
A si $n \equiv 1\,[4]$
A^2 si $n \equiv 2\,[4]$
A^3 si $n \equiv 3\,[4]$

ⓒ Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}$ et a_{4k+3} existent,

alors $\begin{pmatrix} a_{4k+2} \\ a_{4k+1} \\ a_{4k} \end{pmatrix} = U_{4k+2} = \underset{I_4}{A^{4k+2-2}} U_2 = A^{4k} U_2 \underset{\text{Préliminaires}}{=} I_3 U_2 = U_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

Donc $a_{4k} = a_0 = 1$

$a_{4k+1} = a_1 = 2\cos\theta - 1$

$a_{4k+2} = a_2 = 1 - 2\cos\theta$

et $a_{4k+3} = -q a_{4k+2} - p a_{4k+1} - a_{4k}$ d'après I②

càd $a_{4k+3} = -q(1-2\cos\theta) - p(2\cos\theta - 1) - 1 \underset{p=q=1}{=} -1$

Concl : $\boxed{a_{4k} = 1,\ a_{4k+1} = 2\cos\theta - 1,\ a_{4k+2} = 1-2\cos\theta \text{ et } a_{4k+3} = -1}$

ⓓ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$ donc $a_{4k} = 1$, $a_{4k+1} = -1$, $a_{4k+2} = 1$ et $a_{4k+3} = -1$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $N > 3$.

$Q = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k$

Donc $BQ = (1+X+X^2+X^3) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k = (1+X)(X-i)(X+i) \times \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k$

$= (1+X)(X^2+1) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k = (X^2+1)\left[(1+X)\sum_{k=0}^{N}(-1)^k X^k\right]$

$= (X^2+1) \sum_{k=0}^{N} \left((-1)^k X^k - (-1)^{k+1} X^{k+1}\right) \underset{\text{somme telescopique}}{=} (X^2+1)\left(1 - (-1)^{N+1} X^{N+1}\right)$

$BQ = (X^2+1)\left(1 + (-1)^{N+2} X^{N+1}\right)$

Ainsi $X^{N+1} R = A - BQ = X^2 + 2X\cos\frac{\pi}{2} + 1 - (X^2+1)\left(1 + (-1)^{N+2} X^{N+1}\right)$

$X^{N+1} R = (X^2+1)\left[1 - 1 - (-1)^{N+2} X^{N+1}\right] = (X^2+1)(-1)^{N+1} X^{N+1}$

Donc $\left(R - (-1)^{N+1} X^{N+1}\right) X^{N+1} = 0$ or $X^{N+1} \neq 0$ donc $R - (-1)^{N+1} X^{N+1} = 0$

Concl : $\boxed{Q = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k \text{ et } R = (-1)^{N+1} X^{N+1}}$

② $F = \dfrac{X^2+2X\cos\theta+1}{X^3+X^2+X+1} = \dfrac{X^2+2X\cos\theta+1}{(X+1)(X-i)(X+i)}$ dans $\mathbb{C}[X]$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tq $F = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-i} + \dfrac{c}{X+i}$

J'évalue $\dfrac{X^2+2X\cos\theta+1}{(X-i)(X+i)}$ en -1 j'obtiens $a = \dfrac{1-2\cos\theta+1}{(-1-i)(-1+i)} = \dfrac{2-2\cos\theta}{1+1} = 1-\cos\theta$

J'évalue $\dfrac{X^2+2X\cos\theta+1}{(X+1)(X+i)}$ en i j'obtiens $b = \dfrac{-1+2i\cos\theta+1}{(i+1)(i+i)} = \dfrac{2i\cos\theta}{2i(1+i)} = \dfrac{\cos\theta(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

J'évalue $\dfrac{X^2+2X\cos\theta+1}{(X+1)(X-i)}$ en $-i$ j'obtiens $c = \dfrac{-1-2i\cos\theta+1}{(-i+1)(-i-i)} = \dfrac{-2i\cos\theta}{-2i(1-i)} = \dfrac{\cos\theta(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

donc $F = \dfrac{1-\cos\theta}{X+1} + \dfrac{\frac{\cos\theta(1-i)}{2}}{X-i} + \dfrac{\frac{\cos\theta(1+i)}{2}}{X+i}$

$$F = \frac{1-\cos\theta}{X+1} + \frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{1-i}{X-i} + \frac{1+i}{X+i}\right)$$

$$F = \frac{1-\cos\theta}{X+1} + \frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{(1-i)(X+i)+(1+i)(X-i)}{(X-i)(X+i)}\right)$$

$$F = \frac{1-\cos\theta}{X+1} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\frac{2X+2}{X^2+1}$$

$$\boxed{F = \frac{1-\cos\theta}{X+1} + \frac{\cos\theta\,(X+1)}{X^2+1}}$$

③ Soit $n \geq 2$

D'une part, $\dfrac{1-\cos\theta}{X+1} = (1-\cos\theta)\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^p X^p + \dfrac{(-1)^{n+1}X^{n+1}}{1+X}\right)$

$= (1-\cos\theta)\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor} X^{4k} - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{4}\rfloor} X^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{4}\rfloor} X^{4k+2} - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-3}{4}\rfloor} X^{4k+3} + (-1)^{n+1}\dfrac{X^{n+1}}{1+X}\right)$

D'autre part, $\dfrac{\cos\theta(X+1)}{1+X^2} = \cos\theta(X+1)\left(\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^p X^{2p} + \dfrac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}X^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2}}{1+X^2}\right)$

$= \cos\theta\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor}(X^{4k}+X^{4k+1}) - \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-2}{4}\rfloor}(X^{4k+2}+X^{4k+3}) + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}\dfrac{(1+X)X^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2}}{1+X^2}\right)$

Si on prend $h=n$

$\dfrac{A}{B} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h}{4}\rfloor}((1-\cos\theta)+\cos\theta)X^{4k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-1}{4}\rfloor}(-(1-\cos\theta)+\cos\theta)X^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-2}{4}\rfloor}((1-\cos\theta)-\cos\theta)X^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-3}{4}\rfloor}(-(1-\cos\theta)-\cos\theta)X^{4k+3} + X^{h+1}R$

où $R = (1-\cos\theta)\dfrac{(-1)^{n+1}}{1+X} + \cos\theta\,\dfrac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(1+X)X^{2\lfloor\frac{h}{2}\rfloor-h+1}}{1+X^2}$

Ainsi :

$Q = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h}{4}\rfloor} X^{4k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-1}{4}\rfloor}(-1+2\cos\theta)X^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-2}{4}\rfloor}(1-2\cos\theta)X^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{h-3}{4}\rfloor}(-1)X^{4k+3}$

Donc on retrouve $\boxed{a_{4k}=1,\ a_{k+1}=2\cos\theta-1,\ a_{4k+2}=1-2\cos\theta \text{ et } a_{4k+3}=-1}$

Exercice 3 : $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

① • Si $x \to 0^-$, $-\frac{1}{x} \to +\infty$, $e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

donc f n'est pas continue à gauche en 0

• Si $x \to 0^+$ on pose $X = -\frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} X = -\infty$.

$\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$ par CC donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$

or $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ et f est continue à droite en 0

② Comme f n'est pas continue à gauche en 0, f n'est pas dérivable à gauche en 0.

Soit $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{X^2 e^X}{\frac{1}{X}} = X^3 e^X$ en posant $X = -\frac{1}{x}$

Par CC, $\lim\limits_{X \to -\infty} X^3 e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{X \to -\infty} X^3 e^X = 0$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

③ f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$: $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0[$

④ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$ "

• Initialisation : $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ $\forall x > 0$

donc $\forall x > 0$, $f^{(0)}(x) = \frac{P_0(x)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, avec $P_0 = 1$

ainsi, $\forall x > 0$, $P_0(x) = 1$.

• hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

Soit $x > 0$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime}(x) \underset{HR}{=} \frac{P_n'(x) \times x^{2n+2} - P_n(x)(2n+2)x^{2n+1}}{(x^{2n+2})^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{P_n'(x)}{x^{2n+2}} - \frac{(2n+2) P_n(x)}{x^{2n+3}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}}$$ où $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + P_n(x)[1 - (2n+2)x]$

et $P_{n+1} = X^2 P_n' + P_n[1 - 2(n+1)X] \in \mathbb{R}[X]$ car $P_n \in \mathbb{R}[X]$,

$P_n' \in \mathbb{R}[X]$, $X^2 \in \mathbb{R}[X]$ et $1-2(n+1)X \in \mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ est stable par produit et par combinaisons linéaires.

- Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(5) on a déjà vu que $P_0 = 1$.

$P_1 = X^2 P_0' + [1-2\times 1\times X] P_0 = X^2 \times 0 + [1-2X]\times 1 = 1-2X$

$P_2 = X^2 P_1' + [1-2\times 2\times X] P_1 = X^2(-2) + [1-4X][1-2X]$

$P_2 = -2X^2 + 1 - 2X - 4X + 8X^2 = 6X^2 - 6X + 1$

$P_3 = X^2 P_2' + [1-2\times 3\times X] P_2 = X^2(12X-6) + [1-6X][6X^2-6X+1]$

$P_3 = \underline{12X^3} - 6X^2 + 6X^2 - 6X + 1 - \underline{36X^3} + 36X^2 - 6X$

$P_3 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1$

$P_4 = X^2 P_3' + [1-2\times 4\times X] P_3 = X^2(-72X^2 + 72X - 12) + [1-8X][-24X^3 + 36X^2 - 12X + 1]$

$P_4 = -72X^4 + 72X^3 - 12X^2 - 24X^3 + 36X^2 - 12X + 1 + 192X^4 - 288X^3 + 96X^2 - 8X$

$P_4 = 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1$.

(6) A la suite de ces calculs on conjecture que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " P_n est de degré n, a pour coefficient dominant $(-1)^n (n+1)!$ et pour terme constant 1 ".

Montrons-le par récurrence

- initialisation : P_0 est de degré 0, a pour coefficient dominant $1 = (-1)^0 (0+1)!$ et pour terme constant 1 car $P_0 = 1$
- hérédité :

supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$P_{n+1} = X^2 P_n' + [1 - 2(n+1)X] P_n$.

Intéressons-nous au terme de plus haut degré de P_{n+1} :

le terme de plus haut degré de P_n est : $(-1)^n (n+1)!\, X^n$ par HR

le terme de plus haut degré de P_n' est : $(-1)^n (n+1)!\, n X^{n-1}$

Donc le terme de plus haut degré de P_{n+1} est :

$X^2 (-1)^n (n+1)!\, n X^{n-1} - 2(n+1) X (-1)^n (n+1)!\, X^n$

$= X^{n+1} \left[(-1)^n (n+1)!\, n - 2(n+1)(-1)^n (n+1)! \right]$

$= X^{n+1} \left[(-1)^n (n+1)! \right] \left[n - 2(n+1) \right]$

$= X^{n+1} (-1)^n (n+1)! (-n-2) = X^{n+1} (-1)^{n+1} (n+1)! (n+2)$

$= (-1)^{n+1} (n+2)!\, X^{n+1}$

P_{n+1} est donc un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1} (n+2)!$

Intéressons-nous au terme constant de P_{n+1} : c'est $P_{n+1}(0)$

or $P_{n+1} = X^2 P'_n + [1-2(n+1)X] P_n$

donc $P_{n+1}(0) = 0^2 P'_n(0) + [1-2(n+1)0] P_n(0)$

$= 0 + 1 \times P_n(0) = P_n(0)$

or le terme constant de P_n est $P_n(0) = 1$ par HR

donc $P_{n+1}(0) = 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

7) Soit $x>0$. On a $g(x) = x^2 f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fcts dér.

et $\forall x>0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$.

Ainsi $g' = f$ sur $\mathbb{R}^*$

Or f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ d'après q3

Donc g' est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$ (récurrence immédiate).

8) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 3$ et $x>0$. D'après la formule de Leibniz,

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \quad \text{où } u : x \mapsto x^2$$

on a : $\forall x>0$, $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et $\forall k>2$, $u^{(k)}(x) = 0$

Ainsi $g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{u^{(k)}(x)}_{=0} f^{(n-k)}(x)$

$= \binom{n}{0} u^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) f^{(n-2)}(x)$

$= x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 f^{(n-2)}(x)$

$\forall x>0$, $g^{(n)}(x) = x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x)$ (*)

Si $n=0$, $g^{(0)}(x) = g(x) = x^2 f(x)$

Si $n=1$, $g'(x) = f(x)$

Si $n=2$, $g''(x) = f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^2} f(x)$.

En posant $m = n-1$ dans (*),

On a donc :

$\forall m \geq 2, \forall x>0$, $g^{(m+1)}(x) = x^2 f^{(m+1)}(x) + 2(m+1)x f^{(m)}(x) + (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geq 2, \forall x>0$, $f^{(m)}(x) = x^2 f^{(m+1)}(x) + 2(m+1)x f^{(m)}(x) + (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geq 2, \forall x>0$, $x^2 f^{(m+1)}(x) = [1-2(m+1)x] f^{(m)}(x) - (m+1)m f^{(m-1)}(x)$

$\forall m \geq 2\ \forall x>0$, $x^2 \frac{P_{m+1}(x)}{x^{2(m+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}} = [1-2(m+1)x] \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} e^{-\frac{1}{x}} - (m+1)m \frac{P_{m-1}(x)}{x^{2(m-1)+2}} e^{-\frac{1}{x}}$

$\forall m \geq 2\ \forall x>0$, $\frac{P_{m+1}(x)}{x^{2m+2}} = [1-2(m+1)x] \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} - m(m+1) \frac{P_{m-1}(x)}{x^{2m}}$

$\forall m \geq 2$, $P_{m+1}(x) = [1-2(m+1)x] P_m(x) - m(m+1)x^2 P_{m-1}(x)$

vérifier que cette relation est vraie lq $m = 0$ ou 1 avec q5.