

Ex 1 TD 22

item 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où $f: t \mapsto \ln(1+t^2)$ est une fonction continue sur $[0,1]$.

$(\ln u_n)$ est une suite de Riemann associée à une fonction continue donc $(\ln u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

Pour calculer cette intégrale, on fait une IPP

$$\begin{aligned} \text{Soit } u: t &\mapsto t & u': t &\mapsto 1 \\ v': t &\mapsto \frac{2t}{1+t^2} & v: t &\mapsto \ln(1+t^2) \end{aligned}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t^2) dt &= [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= 1 \cdot \ln(1+1^2) - 0 - \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{1+t^2} dt \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(\frac{2(t^2+1)}{t^2+1} - \frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= \ln 2 - \int_0^1 2 dt + 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{lin de} \\ \text{l'int} \end{array} \right\} \\ &= \ln 2 - [2t]_0^1 + 2 [\arctan]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + 0 + 2 \arctan 1 - 2 \arctan 0 \\ &= \ln 2 - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} - 2 \times 0 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Comme $(\ln u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ et comme exp

est continue sur $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers exp $(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2})$

cà d $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{e^2}$.