

ex 9 F, G et H 3 sous-espaces de E . $F \subset H$.Montrons que $F + (G \cap H) = (F + G) \cap H$ par double inclusion• Soit $x \in F + (G \cap H)$ alors $\exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G \cap H$ tq $x = x_1 + x_2$ $x_1 \in F$ et $F \subset H$ donc $x_1 \in H$.et H est un sous-espace de E donc $x = \underbrace{x_1}_{\in H} + \underbrace{x_2}_{\in H} \in H$.De plus $x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in (G \cap H) \subset G}$ donc $x \in F + G$ } Donc $x \in (F + G) \cap H$
et $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$ • Soit $x \in (F + G) \cap H$.alors $x \in H$ et $\exists x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tq $x = x_1 + x_2$ Mq $x_2 \in G \cap H$. On sait que $x_2 \in G$. Mq $x_2 \in H$ $x_2 = \underbrace{x}_{\in H} - \underbrace{x_1}_{\in F \subset H}$ donc $x_2 \in H$ car H sous-espace de E Ainsi $x_2 \in G \cap H$ et $x \in F + (G \cap H)$.

ex 11 $F = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, -1)$ puis que $F = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$
 $F = \{x(1, -1), x \in \mathbb{R}\}$
 $G = \text{Vect}(v)$ où $v = (1, 1)$ puis que $G = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$
 $G = \{x(1, 1), x \in \mathbb{R}\}$
 $u \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$
 donc F et G sont 2 sous-espaces de E

 $F \cup G$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$; $(1, -1) \in F \cup G$ car $(1, -1) \in G \subset F \cup G$ $(1, 1) \in F \cup G$ car $(1, 1) \in F \subset F \cup G$ et $(1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin F \cup G$ donc $F \cup G$ n'est pas stable par +

ex 1

 $(E, +)$ est un groupe commutatifSoient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $x \in E$

$$\alpha * (\beta * x) = \text{Re}(\alpha) (\beta * x) = \text{Re}(\alpha) (\text{Re}(\beta) \cdot x) = \text{Re}(\alpha) \text{Re}(\beta) x$$

Par ailleurs $(\alpha \beta) * x = \text{Re}(\alpha \beta) \cdot x$. Examinons le cas où $\alpha = \beta = i$ Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $i * (i * x) = 0 \cdot (0 \cdot x) = 0$ alors que $(i \cdot i) * x = i^2 * x = -x$

Réponse: NON