b) φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$ par quotient et somme de fonctions qui le sont.

Mq φ' est continue en 0.

Soit $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{-1}{t^2}+\frac{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)}{\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)^2}$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)}{t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}\times\frac{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)}{1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}\times\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times\frac{1}{1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}\times\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times\left(1+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{t^2}{3}-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{t^2}\left(-1+1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right) = -\frac{1}{6}+o(1).$$

Donc $\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = -\frac{1}{6}$

or $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ donc $\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \varphi'(0)$ donc φ' est continue en 0.
donc φ est $\mathcal{C}^1$ en 0 donc sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Autre méthode pour obtenir la limite de φ' en 0 :

Soit $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$, $\varphi'(x) = \frac{-\sin^2 t+t^2\cos t}{t^2\sin^2 t}$

$t^2\sin^2 t \underset{0}{\sim} t^4$ et $-\sin^2 t+t^2\cos t = -\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^4)\right)^2+t^2\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$

$$= -\left(t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)\right)+t^2-\frac{t^4}{2}+o(t^4)$$

$$= \frac{t^4}{3}-\frac{t^4}{2}+o(t^4) = -\frac{t^4}{6}+o(t^4)$$

donc $-\sin^2 t+t^2\cos t \underset{0}{\sim} -\frac{t^4}{6}$

et $\varphi'(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{t^4}{6}}{t^4}$ donc $\varphi'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}$ donc $\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = -\frac{1}{6}$

c) $\forall t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\psi(t) = 1-t\varphi(t)$.

φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $t\mapsto t$ également et $t\mapsto 1$ aussi.

Donc par somme et produit, ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\forall t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\psi'(t) = -\varphi(t)-t\varphi'(t)$

en particulier $\psi'(0) = -\varphi(0)-0\varphi'(0) = 0$