12. Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Déterminez la monotonie de cette suite. On détaillera les calculs. si $x \in \mathbb{R}^+_*$ et $n \in \mathbb{N}$

1,5 $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0 \Rightarrow (S_n)$ crois

13. Déterminer la limite de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

$\ell = \int_0^1 \sin x \, dx = [-\cos x]_0^1 = -\cos 1 + \cos 0 = -\cos 1 + 1$

1,5 car sin cont sur $[0,1]$ et on reconnaît une somme de Riemann

14. Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \int_x^{x^2} \ln(t)\mathrm{d}t$. Soit H une primitive de ln sur $\mathbf{R}_+^*$. Donner une nouvelle expression de $G(x)$ en utilisant la fonction H puis déterminer $G'(x)$ pour $x > 0$.

$\forall x > 0 \; G(x) = [H(t)]_x^{x^2} = H(x^2) - H(x)$ G est der comme somme et composée de fcts der sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x > 0 \; G'(x) = 2x \times H'(x^2) - H'(x) = 2x \ln(x^2) - \ln x$ ou 1 pr seult le résultat

1,5

15. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Enoncez la contraposée de

$$(F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E) \Rightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

0,5 $F \not\subset G$ et $G \not\subset F \Rightarrow$ $F \cup G$ n'est pas un sev de E

16. Dans $\mathbf{R}^3$ on donne $u = (-12, -2, 5)$. Caractériser Vect(u), c'est-à-dire donner une représentation paramétrique (système d'équations paramétriques) de cette droite vectorielle.

Soit $u_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u_1 = (x, y, z) \in \text{Vect}(u)$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $u_1 = \lambda u$

1 ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x = -12\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$

/20 15

MPSI. IE 22 Avril 2025. Nom, Prénom :

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction Arcsin, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée, son tableau de variation. Que vaut $cos(\text{Arcsin}(x))$?

2,5

$\mathcal{D}_{\text{Arcsin}} = [-1, 1]$

Arcsin est dér sur $]-1,1[$

$\text{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in]-1,1[$

x	-1	0	1
Arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

$\forall x \in [-1,1]$ $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$

2. Donner la définition d'une relation d'équivalence sur E. Soit x un élément de E et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Donner la définition de la classe d'équivalence de x.

1,5 rel binaire RST 1

$Cl(x) = \{ y \in E \text{ tq } x\mathcal{R}y \}$

3. Dans le cas où λ est racine simple de l'équation caractéristique, l'équation différentielle linéaire (E) : $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$ possède une solution particulière de la forme : $Kte^{\lambda t}$

1

4. Sur $\mathbf{R}_*^+$, $\int \ln x dx =$ $x\ln x - x + C$

1 Sur $\mathbf{R}$, $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} =$ $\text{th}\, x + C$

5. Définition d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: M antisym ssi ${}^tM = -M$

0,5

6. Enoncé du théorème de Rolle : f cont sur $[a,b]$, dér sur $]a,b[$, tq $f(a) = f(b)$,

1 alors $\exists c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$

7. Soit P un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Donner la définition de α est racine d'ordre k de P. Donner un polynôme P tel que 2 est racine d'ordre exactement 3 de P.

1,5 α racine d'ordre k de P ssi $(X-\alpha)^k \mid P$ et $(X-\alpha)^{k+1} \nmid P$

$P = (X-2)^3(X-3)$

8. Donner le DL à l'ordre n de $\ln(1+x)$ en 0 et le DL à l'ordre $2n$ de $\cos x$ en 0.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{0}{o}(x^n)$ 0,5 pr les 2 1ers

2 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{0}{o}(x^{2n})$ 1 min si $o(x^{2n})$ dernier terme et le 0

9. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en un point a.

Soit $n \in \mathbb{N}$ si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I Soit $a \in I$ et $x \in I$

1,5 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$

10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont dites adjacentes lorsque

1,5 $\forall n$ $u_n \leq v_n$ et $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

11. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Donner la définition de l'ensemble $F+G$. Quelle est la structure algébrique de cet ensemble ?

1 $F+G = \{ x+y,\ x \in F \text{ et } y \in G \}$, est un sev de E

($F+G = \text{Vect}(F \cup G)$).

12. On suppose qu'on a montré que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est majorée par e^x pour tout $x \geq 0$. Expliquez comment vous pouvez en déduire que la suite (S_n) converge. Aucun calcul n'est à écrire, précisez juste votre démarche.

(S_n) est majorée et croissante, donc elle CV
1,5 par le th de la limite monotone

13. Déterminer la limite de la suite u définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}$.

$$\ell = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{-1}{1+1} + \frac{1}{1+0} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

1,5 Car $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est cont sur $[0,1]$ et on reconnaît une somme de Riemann

14. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Ecrire à l'aide de quantificateurs la proposition : "'non($F \subset G$) et non($G \subset F$)"'.

0,5 $\exists x \in F \cap \overline{G}$ et $\exists y \in G \cap \overline{F}$

15. On suppose que A et B sont deux parties d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On admet que $A \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ et que $B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

$A \cup B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ et $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est un sev de E
1,5 or $\text{Vect}(A \cup B)$ est le + petit sev de E qui contient $A \cup B$

16. Dans $\mathbf{R}^3$ on donne $v = (2, -1, 4)$ et $w = (5, 0, 1)$. Caractériser $\text{Vect}(v, w)$, c'est-à-dire donner une représentation paramétrique (système d'équations paramétriques) de ce plan vectoriel.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1 $u \in \text{Vect}(v, w)$ ssi $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $u = \lambda v + \mu w$

ssi $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\begin{cases} x = 2\lambda + 5\mu \\ y = -\lambda \\ z = 4\lambda + \mu \end{cases}$

/21 15

MPSI. IE 22 Avril 2025. Nom, Prénom :

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction Arccos, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée, son tableau de variation. Que vaut Arcos(x)+Arcsin(x) ?

2,5 $\mathcal{D}_{\text{Arccos}} = [-1,1]$

Arccos est dér sur $]-1,1[$

$\text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in]-1,1[$

x	-1	0	1
Arccos x	π	$\frac{\pi}{2}$	0

$\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$

2. Donner le définition d'une relation d'ordre sur un ensemble E. Quand dit-on que l'ordre est total sur E ?

1,5 rel binaire RAT

lorsque $\forall x \in E\ \forall y \in E$, xRy ou yRx

3. Dans le cas où λ est racine double de l'équation caractéristique, l'équation différentielle linéaire (E) : $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t}$ possède une solution particulière de la forme : $Kt^2e^{\lambda t}$

1

4. Sur $]-1,1[$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}\, x + C,\ C \in \mathbb{R}$

1 Sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbf{Z}$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ C \in \mathbb{R}$

5. Définition du groupe linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: c'est l'ensemble des matrices inversibles

0,5

6. Enoncé du théorème des accroissements finis : f cont sur $[a,b]$, dér sur $]a,b[$,

1 $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$

7. Défintion d'un polynôme scindé. Donner un exemple de polynôme scindé et un exemple de polynôme non scindé dans $\mathbf{R}[X]$. un pol non nul est scindé ssi il admet des

1,5 racines dont la somme des multiplicités est égale à son degré, $(X-2)(2X+3)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, X^2+1 ne l'est pas,

8. Donner le DL à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$ en 0 et le DL à l'ordre $2n$ de ch(x) en 0.

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{48} + o(x^3)$ 0,5

2 $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

9. Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}$ soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a,b) \in I^2$. Si M est un

1,5 majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ $a<b$, alors $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$

10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. F et G sont dits supplémentaires lorsque

1 $F + G = E$, et $F \cap G = \{0_E\}$

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque

il existe φ strict croiss, $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tq $v_n = u_{\varphi(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1,5