



*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont indépendants.*

## Exercice 1

Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $\mathcal{ST}_n$  l'ensemble des matrices  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

— pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2$ ,  $a_{i,j} \geq 0$

— et pour tout  $i \in [[1, n]]$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

Une matrice qui appartient à  $\mathcal{ST}_n$  est dite stochastique.

1. Soient  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = 3A$ .

(a) Montrer que  $A$  est un élément de  $\mathcal{ST}_4$ .

(b) Calculer  $B^2$  et en déduire une relation simple liant  $B^2$ ,  $B$  et  $I_4$ .

(c) On souhaite déterminer les puissances de  $A$ .

i. Soit  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  les suites définies par  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$  et  $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$ .

ii. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$ .

iii. En déduire  $\beta_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $B^k$  puis  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(d) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $A^k$  est-elle un élément de  $\mathcal{ST}_4$ ?

(e) En utilisant la question 1.b, montrer que  $A$  est inversible.  $A^{-1}$  est-elle un élément de  $\mathcal{ST}_4$ ?

2. On revient à l'étude de  $\mathcal{ST}_n$  avec  $n \geq 1$ .

(a)  $(\mathcal{ST}_n, +, \cdot)$  est-il un sous espace vectoriel de  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ? Justifier la réponse.

(b) Soient  $M = (m_{i,j})$  et  $N = (n_{i,j})$  deux éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $P = MN$ . Donner la formule du coefficient en  $i$ ème ligne et  $j$ ème colonne de  $P$ , que l'on notera  $p_{i,j}$ , avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ .

(c) Montrer que le produit de deux éléments de  $\mathcal{ST}_n$  est un élément de  $\mathcal{ST}_n$  (on dit alors que  $\mathcal{ST}_n$  est stable par produit).

(d) Montrer que si  $M$  est un élément de  $\mathcal{ST}_n$  et si  $k \in \mathbb{N}$  alors  $M^k$  est un élément de  $\mathcal{ST}_n$ .

(e) Soit  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $M$  est un élément de  $\mathcal{ST}_n$ ,  $MX = X$ .

(f) Question à traiter une fois que toutes les autres questions de ce DS ont été traitées.

Déterminer les matrices de  $\mathcal{ST}_n$  qui sont inversibles et dont l'inverse appartient à  $\mathcal{ST}_n$ .

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction, définie sur  $I = ]-1, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1+x)} \text{ si } x \in I \setminus \{0\} \text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x = 0.$$

On considère l'équation différentielle

$$x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1 \quad (E)$$

1. Question préliminaire : Soit  $x > 0$ , montrer que  $\exp(-x - \ln(x) - \ln(x+1)) = \frac{e^{-x}}{x(x+1)}$ .
2. Etude de la fonction  $f$ 
  - (a) Donner le développement limité de  $f$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.
  - (b) Montrer que la fonction  $f$  est continue et dérivable en 0. Précisez  $f'(0)$ .
  - (c) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $F = \frac{1+3X+X^2}{X(X+1)}$ .
4. Résoudre  $(E)$  sur  $I_1 = ]-1, 0[$  et sur  $I_2 = ]0, +\infty[$ .
5. On cherche à déterminer une solution de  $(E)$  sur  $I = ]-1, +\infty[$ . Soit  $y$  une telle solution.
  - (a) Donner les expressions vérifiées par  $y$  sur  $I_1$  et sur  $I_2$
  - (b) Déterminer, en utilisant la continuité de  $y$  en 0, les valeurs des constantes d'intégration dans les expressions de  $y$  obtenues à la question précédente.  
Indication : on pourra utiliser le développement limité de  $x \mapsto e^{-x}$  en 0 pour les calculs de limites.
  - (c) Vérifier que  $f$  est l'unique solution de  $(E)$  sur  $I$ .

## Exercice 3

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On souhaite déterminer les puissances de  $B$ .

- Factoriser le polynôme  $X^2 - 2X - 3$ .
  - Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $Q$  et  $R$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $X^2 - 2X - 3$ . Déterminer en fonction de  $k$  les coefficients du polynôme  $R$ .
  - Evaluer en  $B$  le polynôme  $(X^2 - 2X - 3)Q(X) + R(X)$ . En déduire  $B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . Démontrer que  $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$  est divisible par  $(X-1)^3$ .  
 $P$  est-il divisible par  $(X-1)^4$  ?
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $n$  et on pose
- $F = \mathbb{R}_1[X]$ ,
  - $G_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 0\}$ ,
  - $G_2 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P(1) = P(-1) = 0\}$ ,
  - $G_3 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$ .

On rappelle que  $\mathbb{R}_1[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- Montrer que  $G_1$  est sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $F + G_1 = E$ . A-t-on  $F \oplus G_1 = E$  ?
- On admet que  $G_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que la somme  $F + G_2$  est directe. A-t-on  $F \oplus G_2 = E$  ?
- On admet que  $G_3$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $F$  et  $G_3$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .
- Dans le cas où  $n = 3$ , écrire  $G_3$  sous la forme d'un sous espace vectoriel engendré par une partie de  $E$ . Comment nomme-t-on un tel sous-espace vectoriel ? De même écrire  $G_2$  sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré. Comment nomme-t-on un tel sous-espace vectoriel ?

## Exercice 4

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $u_n$  est une somme de Riemann associée à la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ .

En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite  $\ell$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ . On pose  $M = \sup\{|f''(x)|, x \in [0, 1]\}$ .

(a) Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 pour  $f$  sur  $\left[\frac{k}{n}, x\right]$ , où  $x$  est un réel compris entre 0 et 1 et  $k \in [[1, n]]$ .

(b) Réécrire l'inégalité sous la forme d'un encadrement. En intégrant cet encadrement par rapport à la variable  $x$  sur l'intervalle  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ , obtenir l'inégalité :

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6n^3}$$

(c) Proposer une majoration de  $\left| \sum_{k=0}^n \left( \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right|$ .

(d) En déduire que

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6n^2}.$$

3. Appliquer le résultat précédent à la fonction  $g$ , puis montrer

$$\ell - u_n + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n g'\left(\frac{k}{n}\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Calculer la limite de la suite  $\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g'\left(\frac{k}{n}\right) \right)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5. Donner alors un équivalent simple de  $\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n g'\left(\frac{k}{n}\right)$  puis de  $u_n - \ell$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .