Corrigé du DS8 MPSI   Exercice 1

① ⓐ Tous les coefficients de A sont positifs donc $\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, $a_{ij} \geq 0$.

La somme des coefficients de chaque ligne est égale à $\frac{1}{3}(1+1+1)=1$

donc $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $\sum_{j=1}^{4} a_{ij} = 1$

Concl : $A \in ST_4$

ⓑ

$$B = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3 \end{pmatrix} = B^2 = 2B + 3I_4}$$

ⓒ ⓘ Soit $\mathcal{P}(k)$: " $B^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} = \beta_k B + \alpha_k I_4$ " définie pour $k \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ vraie

- Initialisation : si $k=0$ alors $B^0 = I_4$ or $\beta_0 B + \alpha_0 I_4 = 0B + 1I_4 = I_4$

donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- hérédité : supposons que $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

Mq $\mathcal{P}(k+1)$ vraie

$$B^{k+1} = B^k \times B \overset{HR}{=} (\beta_k B + \alpha_k I_4)(B) = \beta_k B^2 + \alpha_k B \overset{q\,①ⓑ}{=} \beta_k(2B+3I_4)+\alpha_k B$$

$$= (2\beta_k + \alpha_k)B + 3\beta_k I_4 = \beta_{k+1}B + \alpha_{k+1} I_k$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ vraie

- Concl : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(k)$ vraie

ⓘⓘ Soit $k \in \mathbb{N}$. $\beta_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\beta_{k+1} = 3\beta_k + 2\beta_{k+1}$

ⓘⓘⓘ $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2

$r^2 - 2r - 3 = 0 \iff r = -1$ ou $r = +3$

Donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = A(-1)^k + B\,3^k$

or $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$ puisque $\beta_{0+1} = \alpha_0 + 2\beta_0 = 1 + 2\times 0 = 1$

donc $\begin{cases} 0 = A(-1)^0 + B\,3^0 = A+B \\ 1 = A(-1)^1 + B\,3^1 = -A+3B \end{cases}$ ssi $\begin{cases} B = -A \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \beta_k = -\frac{1}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}3^k}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_k = 3\beta_{k-1} = -\frac{3}{4}(-1)^{k-1} + \frac{3}{4}3^{k-1} = \frac{3}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}3^k$

et $\frac{3}{4}(-1)^0 + \frac{1}{4}3^0 = 1 = \alpha_0$ donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k = \frac{3}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}3^k}$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$ $B^k = \beta_k B + \alpha_k I_4 = \left(\frac{1}{4}3^k - \frac{1}{4}(-1)^k\right)B + \left(\frac{3}{4}(-1)^k + \frac{1}{4}3^k\right)I_4$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $A^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k B^k = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)B + \left(\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^k + \frac{1}{4}\right)I_4$

$A = \frac{1}{3}B$

Concl : $\forall k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{3^{k-1}}+1 & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}} & 1-\left(\frac{-1}{3}\right)^k & 1-\left(\frac{-1}{3}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}} & 1-\left(\frac{-1}{3}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1-\left(\frac{-1}{3}\right)^k & 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 1+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}} \end{pmatrix}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$

d) Tous les coeff de A^k sont positifs car $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \geq \left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1}$
et $\forall k \in \mathbb{N}$ $1 \geq \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

La somme de chaque ligne est égale à :

$$1 + \frac{(-1)^k}{3^{k-1}} - \left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \frac{3(-1)^k - (-1)^k - (-1)^k - (-1)^k}{3^k}$$

$$= 1 + \frac{(-1)^k(3-3)}{3^k} = 1 + 0 = 1.$$

$\boxed{\text{Concl : } A^k \in ST_n}$

e) $B^2 = 2B + 3I_4$ d'après 1) b) donc $B^2 - 2B = 3I_4$

soit $\frac{1}{3}B(B - 2I_4) = I_4$

Ainsi $B \times \frac{1}{3}(B - 2I_4) = \frac{1}{3}(B-2I_4)B = I_4$ (donc B est inversible d'inverse : $\frac{1}{3}(B - 2I_4)$)

donc $3A \times \frac{1}{3}(3A - 2I_4) = \frac{1}{3}(3A - 2I_4)3A = I_4$

donc $A(3A - 2I_4) = (3A - 2I_4)A = I_4$

donc A est <u>inversible</u> d'inverse : $\boxed{3A - 2I_4 = A^{-1}}$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

<u>$A^{-1} \notin ST_4$</u> car les coefficients de A^{-1} ne sont pas tous positifs.

2 a) $(ST_n, +, \cdot)$ n'est pas un sev de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ car $0_n \notin ST_n$. En effet, la matrice nulle ne possède que des coefficients nuls donc la somme de chaque ligne est égale à 0 et non à 1.

b) $$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj}$$

c) Soit $M = (m_{ij}) \in ST_n$, $N = (n_{ij}) \in ST_n$. On pose $P = MN$ et $P = (p_{ij})$. Mq $P \in ST_n$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$

$p_{ij} = \sum_{k=1} m_{ik} n_{kj}$ avec $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $m_{ik} \geq 0$ et $n_{kj} \geq 0$

car M et N sont stochastiques donc $p_{ij} \geq 0$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ik} n_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} n_{kj} \right)}_{=1}$$
$=1$ car la somme des coeff en $k^{\text{ème}}$ ligne de N est égale à 1

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1$$ car la somme des coeff en i^e ligne de M est égale à 1

Donc la somme de chaque ligne de P est égale à 1

Donc $P = MN$ est stochastique et ST_n est stable par produit.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(k)$: " $M^k \in ST_n$ ". Mq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ vraie

par récurrence

initialisation : $\mathcal{P}(0)$ vraie car $M^0 = I_n \in ST_n$

hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$

Mq $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

$M^{k+1} = M^k \times M$. Par HR $M^k \in ST_n$ et $M \in ST_n$

Donc par 2c), $M^k \times M \in ST_n$ donc $M^{k+1} \in ST_n$

Concl : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in ST_n}$

(e) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_{i1} = 1$

le coeff en i^e ligne de MX est d'après (2)(b) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik} x_{k1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = 1$$

car $M \in ST_n$ donc la somme des coeff de la i^e ligne de M est égale à 1.

Ainsi $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{MX = X}$.

(f) Soit $M \in ST_n \cap GL_n(\mathbb{K})$. On pose $M = (m_{ij})$

On note $N = M^{-1}$ et on suppose que $N \in ST_n$. On pose $N = (n_{ij})$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, soit $j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$

le coeff en i^e ligne et j^e colonne de NM est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{kj}$ - Il est égal au coeff en i^e ligne et j^e colonne de I_n car $NM = I_n$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{kj} = 0$. Or $M \in ST_n$ et $N \in ST_n$ donc

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $n_{ik} m_{kj} \geqslant 0$ Donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $n_{ik} m_{kj} = 0$

(coeff positifs de somme nulle).

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Comme N est inversible, sa k^e colonne n'est pas la colonne nulle donc $\exists\, i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $n_{i_0 k} \neq 0$

Or $n_{i_0 k} m_{kj} = 0$ pour $j \neq i_0$ donc pour tout $j \neq i_0$, $m_{kj} = 0$

Donc M a au plus un coefficient non nul sur sa k^e ième ligne.

Or la somme des coefficients de chaque ligne de M est égale à 1

Donc M est une matrice n'ayant qu'un seul 1 sur chaque ligne. <u>Or la matrice M est inversible donc ces 1 sont pour chaque ligne dans une colonne différente</u>. (M est une matrice de permutation)

<u>Réciproquement</u>, si une matrice a tous ses coefficients tous nuls sauf un par ligne qui vaut 1 et pour chaque ligne dans une colonne différente, alors $M \in ST_n$, M est inversible et son inverse est élément de ST_n (utiliser le fait que M est une matrice de permutation).

Exercice 2

① Soit $x>0$ $\exp(-x-\ln(x)-\ln(x+1)) \overset{\text{prop de exp}}{=} \frac{1}{\exp(x+\ln x+\ln(x+1))} \overset{\text{prop de exp}}{=} \frac{1}{e^x e^{\ln x} e^{\ln(x+1)}}$

$= \frac{1}{e^x \times x(x+1)} = \frac{e^{-x}}{x(x+1)}$

②ⓐ $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\underset{0}{o}(x^4)$ et $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+\underset{0}{o}(x^4)$

Soit $x \in I\setminus\{0\}$

$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x(1+x)} = \frac{1}{x}(1-e^{-x})\frac{1}{1+x}$

$= \frac{1}{x}\left(1-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\underset{0}{o}(x^4)\right)\right)\times\left(1-x+x^2-x^3+x^4+\underset{0}{o}(x^4)\right)$

$= \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+\underset{0}{o}(x^3)\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4+\underset{0}{o}(x^3)\right)$

$= \frac{1}{x}\left(x-x^2+x^3-x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{24}+\underset{0}{o}(x^4)\right)$

$= \frac{1}{x}\left(x-\frac{3x^2}{2}+\frac{10}{6}x^3-\frac{41}{24}x^4+\underset{0}{o}(x^4)\right) = \boxed{1-\frac{3x}{2}+\frac{5}{3}x^2-\frac{41}{24}x^3+\underset{0}{o}(x^3)=f(x)}$

②ⓑ $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} 1-\frac{3x}{2}+\frac{5}{3}x^2 = 1$ et $f(0)=1$

donc f est continue en 0

comme f admet un $DL_2(0)$, par troncature f admet un $DL_1(0)$

donc f est dérivable et continue en 0 et $\boxed{f'(0)=-\frac{3}{2}}$

②ⓒ f est $\mathcal{C}^1$ sur $I-\{0\}$ en tant que produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $I-\{0\}$.

Mq f' est continue en 0.

Soit $x\in I\setminus\{0\}$,

$f'(x) = \frac{e^{-x}x(1+x)-(1-e^{-x})[1+2x]}{(x(1+x))^2} = \frac{e^{-x}x+e^{-x}x^2-(1+2x-e^{-x}-2xe^{-x})}{x^2(1+x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{-x}x+e^{-x}x^2-1-2x+e^{-x}+2xe^{-x}}{x^2(1+x)^2} = \frac{3xe^{-x}+e^{-x}x^2-1-2x+e^{-x}}{x^2(1+x)^2}$

or $3xe^{-x}+x^2e^{-x}-1-2x+e^{-x} = e^{-x}(1+3x+x^2)-1-2x$

$= \left(1-x+\frac{x^2}{2}+\underset{0}{o}(x^2)\right)(1+3x+x^2)-1-2x$

$= 1+3x+x^2-x-3x^2+\frac{x^2}{2}-1-2x+\underset{0}{o}(x^2)$

$= -\frac{3}{2}x^2+\underset{0}{o}(x^2)$

$\sim -\frac{3}{2}x^2$

et $x^2(1+x^2)\underset{0}{\sim}x^2\times1$ car $\lim_{x\to0}(1+x)^2=1$ donc $(1+x)^2\underset{0}{\sim}1$

Ainsi $f'(x)\underset{0}{\sim}\frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2}$ donc $f'(x)\underset{0}{\sim}-\frac{3}{2}$ donc $\lim_{x\to0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

or $f'(0)=-\frac{3}{2}$ donc f' est continue en 0

Concl f est $\mathcal{C}^1$ sur I

③ $$\begin{array}{r|l} X^2+3X+1 & X^2+X \\ \underline{X^2+X} & \overline{1} \\ 2X+1 & \end{array}$$

donc $F = 1 + \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$(XF)(0) = 1 = a$ et $((X+1)F)(-1) = \frac{1-3+1}{-1} = b$

donc $\boxed{F = 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{1+X}}$

④ Résolution de (E) sur $I_2 =]0,+\infty[$

• (E_H) : $y'(x) + \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)}\, y(x) = 0$

$a : x \mapsto \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ est cont sur I_2 donc elle y admet des primitives

$A : x \mapsto x + \ln x + \ln(1+x)$ est l'une d'entre elles

Donc d'après le cours,

les solutions de (E_H) sont : $x \mapsto Ke^{-x-\ln x-\ln(x+1)}$, $K\in\mathbb{R}$

càd d'après ① : $x \mapsto \frac{Ke^{-x}}{x(x+1)}$

• on détermine une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante sous la forme $y_p : x \mapsto \frac{K(x)e^{-x}}{x(x+1)}$

où K est une fct dérivable sur $]0,+\infty[$

y_p est dérivable sur I_2 et

$\forall x\in I_2,\ y_p'(x) + \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)}\, y_p(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

ssi $\forall x\in I_2,\ \frac{(K'(x)e^{-x} - e^{-x}K(x))\,x(x+1) - K(x)e^{-x}(2x+1)}{x^2(x+1)^2} + \frac{(1+3x+x^2)K(x)e^{-x}}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$

ssi $\forall x\in I_2,\ \frac{x(x+1)K'(x)e^{-x} + \cancel{K(x)e^{-x}(-2x-1-x^2-x) + K(x)e^{-x}}}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$

ssi $\forall x\in I_2,\ K'(x) = e^{x}$

On propose donc $K(x) = e^{x}$ par ex et donc $y_p(x) = \frac{e^{x}e^{-x}}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

• Concl : les solutions de (E) sur I_2 sont :

$\boxed{x \mapsto \frac{1}{(x+1)x} + \frac{Ke^{-x}}{x(x+1)},\ K\in\mathbb{R}}$

Résolution de (E) sur $I_1 =]\quad[$, de même :

• (EH) a pour solutions : $x \mapsto Ke^{-x-\ln|x|-\ln|x+1|}$ càd $x \mapsto \frac{Ke^{-x}}{|x||x+1|}$

ou encore $x \mapsto \frac{Ke^{-x}}{-x(x+1)}$ avec $K\in\mathbb{R}$

càd $x \mapsto \frac{K'e^{-x}}{x(x+1)}$ avec $K'\in\mathbb{R}$ $(K' = -K)$

- $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ est une sol de (E) sur I_1
- Concl : les solutions de (E) sur I_1 sont $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{K'e^{-x}}{x(x+1)},\ K' \in \mathbb{R}}$

5) a) $\forall x \in I_1 : y(x) = \dfrac{1}{(x+1)x} + \dfrac{K'e^{-x}}{x(x+1)}$ avec $K' \in \mathbb{R}$ car y est sol de (E) sur I_1

$\forall x \in I_2 : y(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{Ke^{-x}}{x(x+1)}$ avec $K \in \mathbb{R}$ car y est sol de (E) sur I_2

b) Si y est solution de (E) sur I alors nécessairement y est continue en 0 et $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = y(0)$.

Soit $x \in I_1$, $y(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{K'e^{-x}}{x(x+1)} = \dfrac{1 + K'\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x(x+1)}$

Si $K' \neq -1$ alors $y(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1+K'}{x}$ car $1+x \underset{0}{\sim} 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 + K' - K'x + \frac{K'x^2}{2} = 1+K'$

et donc $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = \pm\infty$. et donc y n'est pas continue en 0

Donc $K' = -1$ et $y(x) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = 1$

De même, on montre que $K = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 1$

or on a : $\forall x \in I$, $x(x+1)\, y'(x) + (1 + 3x + x^2)\, y(x) = 1$ car y sol de (E) sur I

donc en particulier si $x = 0$, $0(0+1)y'(0) + (1)\, y(0) = 1$ donc $y(0) = 1$

Concl : si y est solution de (E) sur I alors $K = K' = -1$ et donc $y = f$ sur I_1 et $y = f$ sur I_2 et $y(0) = f(0) = 1$

donc $\boxed{y = f \text{ sur } I}$

c) Raisonnons par analyse-synthèse

analyse : faite q 5) b)

synthèse : vérifions que f est solution de (E) sur I. f est $\mathcal{C}^1$ sur I et

d'une part, $0(0+1)f'(0) + (1)\, f(0) = 1$.

d'autre part, d'après 5) a) f est solution de (E) sur I_1 et sur I_2 puisque $\forall x \in I_1$, $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)} + \dfrac{-1 \times e^{-x}}{x(x+1)}$ et $\forall x \in I_2$, $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)} + \dfrac{-1 \times e^{-x}}{x(x+1)}$

$\boxed{\text{Concl : } f \text{ est l'unique solution de (E) sur } I}$

Exercice 3

① ⓐ $X^2-2X-3 = (X+1)(X-3)$

ⓑ Soit $k \in \mathbb{N}$ On a: $X^k = (X^2-2X-3)Q + R$ avec $\deg R < 2$
par définition de la division euclidienne de X^k par X^2-2X-3
Comme $\deg R < 2$, R s'écrit $aX+b$. Déterminons a et b

Comme -1 est racine de X^2-2X-3,

$(-1)^k = 0 \times Q(-1) + R(-1) = -a+b$

Comme 3 est racine de X^2-2X-3,

$3^k = 0 \times Q(3) + R(3) = 3a+b$

Ainsi : $\begin{cases} -a+b = (-1)^k \\ 3a+b = 3^k \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = \dfrac{-(-1)^k+3^k}{4} \\ b = \dfrac{3^k+3(-1)^k}{4} \end{cases}$

Concl : $R = \dfrac{3^k-(-1)^k}{4} X + \dfrac{3^k+3(-1)^k}{4}$

ⓒ $(B^2-2B-3I_4)Q(B) + R(B) = B^k$ le neutre pour x est ici I_4

or $B^2-2B-3I_4 = 0_4$ (le vérifier).

Donc $R(B) = B^k$ donc $\boxed{B^k = \dfrac{3^k-(-1)^k}{4} B + \dfrac{3^k+3(-1)^k}{4} I_4}$

$\Big(R(B) = aB + b\underset{\nearrow B^0}{I_4}$ car R est le polynôme $aX+b = a.X + b.\underset{\nearrow X^0}{1} \Big)$

Soit $n \geq 2$

② Mq 1 est racine d'ordre exactement 3 de P càd $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$

$P(1) = n-(n+2)+(n+2)-n = 0$

$P' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$

$P'(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = n(n+2) - n(n+2) - (n+2) + (n+2)$

$P'(1) = 0$

$P'' = n(n+2)(n+1)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1}$

$P''(1) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 0$

$P''' = n(n+2)(n+1)nX^{n-1} - (n+2)(n+1)n(n-1)X^{n-2}$

$P'''(1) = n(n+2)(n+1)[n-(n-1)] = n(n+2)(n+1) \neq 0$ car $n \geq 2$

Comme $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$, 1 est racine d'ordre de multiplicité 3 de P et donc $\boxed{(X-1)^3 \mid P \text{ et } (X-1)^4 \nmid P}$

③ ⓐ • $G_1 \subset E$ par déf de G_1

• $0_{\mathbb{R}[X]} \in G_1$ car $0_{\mathbb{R}[X]}(0)=0$ et $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathbb{R}_n[X]$

• G_1 est stable par CL :

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in G_1^2$

alors $\alpha P+\beta Q \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par CL, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$

et $(\alpha P+\beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$

$P \in G_1$ et $Q \in G_1$

$\boxed{\text{Concl : } G_1 \text{ est un sev de } E=\mathbb{R}_n[X]}$

Montrons que $F+G_1 = E$

• $F+G_1 \subset E$ car la somme de 2 sev de E est un sev de E

• $E \subset F+G_1$; en effet, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]=E$

alors $\exists (a_0,a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $P = a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n$

donc $P = P_1+P_2$ car $P_1 = a_0+a_1X \in F$ et $P_2 = a_2X^2+\dots+a_nX^n \in G_1$

car $P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_2(0)=0$.

A-t-on $F \oplus G_1 = E$?

$\boxed{\text{non}}$ car $X \in F$ et $X \in G_1$ donc $X \in F\cap G_1$ et $F \cap G_1 \neq \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$

ⓑ Mq $F \cap G_2 = \{0_E\}$

• Soit $P \in F \cap G_2$

Alors $P \in F$ donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $P = aX+b$

et $P \in G_2$ donc $P(0)=P(1)=P(-1)=0$.

Comme $P = aX+b$, on a : $P(0)=b$, $P(1)=a+b$ et $P(-1)=-a+b$.

Comme $P(0)=0$, $b=0$ et comme $P(1)=0$, $a=-b=-0=0$

donc $P = 0X+0 = 0_E$

Concl : $F\cap G_2 \subset \{0_E\}$

• $\{0_E\} \subset F\cap G_2$ car l'intersection de 2 sev de E est un sev de E

Concl : $\boxed{\text{la somme est directe}}$

A-t-on $F \oplus G_2 = E$?

Non. Trouvons un polynôme de E qui n'appartient pas à $F+G_2$

Supposons par exemple que $X^2 \in F+G_2$ et obtenons une contradict°

Si $X^2 \in F+G_2$ alors il existe $P_1 \in F$ et $P_2 \in G_2$ tels que

$X^2 = P_1+P_2$ Comme $P_1 \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $P_1 = aX+b$

Comme $P_2 \in G_2$, $P_2(0) = P_2(1) = P_2(-1) = 0$, donc 0, 1 et -1 sont racines de P_2, donc $X(X-1)(X+1) \mid P_2$ et il existe Q tel que

$Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ et $P = X(X-1)(X+1)Q$

Aussi $X^2 = aX+b+X(X-1)(X+1)Q$ donc $b+aX-X^2+(X)(X-1)(X+1)Q=0_{\mathbb{R}_n[X]}$
En identifiant les coefficients du polynôme nul on obtient :
$a=b=0$, $Q=0_{\mathbb{R}_{n-3}[X]}$ et $-1=0$ absurde.
Donc $X^2 \notin F+G_2$.

ⓒ <u>Mq $F\cap G_3=\{0_E\}$</u>

- Soit $P\in F\cap G_3$
  Alors $P\in F$ donc $\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $P=aX+b$
  et $P\in G_3$ donc $P(0)=P(1)=0$
  Comme $P=aX+b$, on a $P(0)=b$ et $P(1)=a+b$
  Comme $P(0)=0$, $b=0$ et comme $P(1)=0$, $a=-b=-0=0$
  donc $P=0X+0=0_E$
  Concl : $F\cap G_3\subset\{0_E\}$
- $\{0_E\}\subset F\cap G_3$ car l'intersection de 2 sev de E est un sev de E

Concl : $\boxed{\text{la somme est directe}}$.

<u>Mq $F+G_3=E$</u>

- $F+G_3\subset E$ car la somme de 2 sev de E est un sev de E
- $E\subset F+G_3$. En effet, soit $P\in\mathbb{R}_n[X]=E$
  Écrivons la division euclidienne de P par $X(X-1)$
  Il existe $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$ tq $P=X(X-1)Q+R$ avec $\deg R<\deg((X-1)X)$
  Donc $\deg(R)<2$ donc $R\in\mathbb{R}_1[X]$.
  Mq $(X-1)XQ\in G_3$ -

  puisque $(X-1)\mid(X-1)XQ$, 1 est racine de $(X-1)XQ$
  et puisque $X\mid(X-1)XQ$, 0 est racine de $(X-1)XQ$
  Donc $P=R+X(X-1)Q\in F+G_3$

<u>Concl : F et G_3 sont des sev supplémentaires de E</u>

ⓓ Si $n=3$ alors $G_3=\{P\in\mathbb{R}_3[X],\ P(0)=0 \text{ et } P(1)=0\}=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid 0 \text{ et } 1 \text{ sont racines de } P\}$
$G_3=\{P\in\mathbb{R}_3[X],\ X\mid P \text{ et } (X-1)\mid P\}$
$G_3=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid \exists Q\in\mathbb{R}[X] \text{ tq } P=X(X-1)Q\}$
$\deg P=2+\deg Q$ et $\deg P\le 3$ donc $\deg Q\le 3-2$
$G_3=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid \exists Q\in\mathbb{R}_1[X] \text{ tq } P=X(X-1)Q\}$
$G_3=\{X(X-1)(aX+b),\ a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}\}$
$G_3=\{aX^2(X-1)+bX(X-1),\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$
<u>$G_3=\text{Vect}(X^2(X-1),\ X(X-1))$</u>. G_3 est un <u>plan vectoriel</u>
<u>car la partie contient 2 vecteurs : $X^2(X-1)$ et $X(X-1)$</u>

D'autre part $G_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid X\mid P \text{ et } (X-1)\mid P \text{ et } (X+1)\mid P\}$
$G_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid \exists Q\in\mathbb{R}_0[X],\ P=X(X-1)(X+1)Q\}$
$G_2=\{aX(X-1)(X+1),\ a\in\mathbb{R}\}=$ <u>$\text{Vect}(X(X-1)(X+1))$</u>
G_2 est une <u>droite vectorielle</u> car la partie ne contient qu'un vecteur

Exercice 4 DS8 MPSI

1) Soit $n \geq 1$ $\quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $[0,1]$. D'après le cours, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

Concl : $\underline{(u_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers } \ell = \frac{\pi}{4}}$

2) a) Comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et que $M = \sup_{[0,1]} |f''|$ on a d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in [0,1]$ et $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{1} \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^i \right| \leq \frac{M\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{2} \text{, càd}$$

$$\underline{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2} \text{ donc } -\frac{M}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right) \leq \frac{M}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

(encadrement pour le début de b))

b) par croissance de l'intégrale, on a

$$-\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{M}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{M}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 dx$$

par linéarité de l'intégrale

$$-\frac{M}{2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx - f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)dx \leq \frac{M}{2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 dx$$

$$-\frac{M}{2}\left[\left(x-\frac{k}{n}\right)^3 \times \frac{1}{3}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{2}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \leq \frac{M}{2}\left[\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^3}{3}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$$

$$+\frac{M}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{3} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} \leq -\frac{M}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{3}$$

$$-\frac{M}{6n^3} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{M}{6n^3}$$

Ainsi, $\underline{\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6n^3}}$.

c) $\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right|$ par l'inégalité triangulaire

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{6n^3} = \frac{M}{6n^3} \times n = \boxed{\frac{M}{6n^2}}$$

d) $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|$ linéarité de la somme

$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ relation de Chasles

$= \left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \underset{q\,2c}{\leq} \frac{M}{6n^2}$

Donc $\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{6n^2}}$

4)

$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_0^1 g'(x)\,dx = [g(x)]_0^1 = g(1)-g(0) = -\frac{1}{2}$

car on reconnait une somme de Riemann associée à $g' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc $g' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

3) on pose $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$; $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc par 2)d) :

$\left|\int_0^1 g(x)\,dx - u_n + \frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{6n^2}$ avec $M = \sup_{[0,1]} |g''|$ (M existe car g'' est bornée sur $[0,1]$ puisqu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^0$ sur le segment $[0,1]$)

or $\int_0^1 g(x)\,dx = \ell = \frac{\pi}{4}$

donc $n\left|\ell - u_n + \frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{6n^2}\times n$

donc $\left|n\left(\ell - u_n + \frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{6n}$

Par le théorème des gendarmes, comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{6n} = 0$, on a :

$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ell - u_n + \frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)\right) = 0$

donc $\boxed{\ell - u_n + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$

5) $\ell - u_n = -\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ d'après q 3)

or d'après 4) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) = g(1)-g(0) = \frac{1}{1+1^2} - \frac{1}{1+0^2} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$

donc $-\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$

donc $-\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$

donc $\ell - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ et $\boxed{u_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n}}$