DM12 à rendre pour le vendredi 9 mai

Traiter au choix l'un des deux problèmes qui portent sur l'étude d'une suite définie par une intégrale.

Problème 1

Soit n un entier naturel et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

Dans cet exercice on pourra utiliser sans la démontrer la propriété dite de croissance de l'intégrale : si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ telles que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe et calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
5. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$
6. Montrer que, pour $n \geq 0$,
$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}.$$
7. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}.$$
8. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.
9. Etablir que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
10. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x$.

Problème 2

I. Résolution d'équations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\mathrm{th}t = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.

   Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$
2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\mathrm{th}t = t\mathrm{th}t$.

   Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

II. Etude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k t}$.

1. Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).
2. Calculer $I_2(x)$.
3.
   (a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k t} = \dfrac{\mathrm{ch} t}{\mathrm{ch}^{k+1} t}$)

   (b) En déduire I_3 et I_4.
4. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :

   (a) impaire.

   (b) continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer I_k', I_k'' et I_k'''.
6. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.
7. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par $u_n = I_k(n)$.

   (a) Démontrer que cette suite est monotone.

   (b) Démontrer que, pour tout réel t, $\dfrac{1}{\mathrm{ch} t} \leqslant 2e^{-t}$; en déduire que la suite converge.
8. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k t}$, notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k t}$.

   (a) Démontrer l'existence de J_k.

   (b) Calculer J_1 et J_2.

   (c) Calculer J_k.