Semaine du 05/05

Chapitre 23 : Applications linéaires

Généralités Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité.
Endomorphismes Identité, homothéties. Notations id_E , id. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Projection ou projecteur, symétrie : définition géomé- trique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = id$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Automorphismes. Groupe linéaire. Notation $\mathcal{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstrations :

1. ⋄⋄ (théorème 4) Soit f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$
   (c) $\forall x \in E,\ f(x) = 0_F \implies x = 0_E$.
2. ⋄ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$(propr 8)
3. Soit s une symétrie de E, alors s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (propr 9.1)
4. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Si $s \circ s = \mathrm{id}_E$ alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ (propr 9.2)

Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Familles de vecteurs Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Si $(x_i)_{i\in I)}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors Im u =Vect $(u(x_i))_{i\in I}$. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Base, coordonnées. Bases canoniques de K^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $K_n[X]$, $K[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $K[X]$ et $K_n[X]$.
Existence de bases Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $[[1, n]]$, alors il existe une partie J de $[[1, n]]$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E. Existence de bases en dimension finie.
Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Démonstrations :

1. ⋄⋄ Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$ (propr 2)
2. ⋄ Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n) \in E^n$. Si $\mathcal{F}$ est liée alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), ..., f(x_n))$ est liée. Si $\mathcal{F}$ est libre et f injective alors $f(\mathcal{F})$ est libre.(propr 8)

Les élèves qui devaient avoir colle jeudi 8 mai doivent envoyer un message à leur colleur pour demander à décaler la colle un autre jour de la semaine. Passez par le cahier de prépa (icône enveloppe) pour contacter le colleur.

Les élèves ⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux ⋄ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves ⋄⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux ⋄ et sur l'un des exercices suivants (sous D4) :
— Si u et v sont colinéaires alors la famille (u, v) est liée. Si u, v et w sont coplanaires alors la famile (u, v, w) est liée.
— Si (u, v, w) est libre sur $\mathbb{K}$, alors $(u, u + v, u + v + w)$ aussi.
— La famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $(x \longmapsto xe^{\alpha x}, x \longmapsto e^{\alpha x})$, où α est un réel, est libre sur $\mathbb{R}$.

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra déterminer si une famille donnée est libre ou liée sur $\mathbb{K}$. Les exercices porteront ensuite sur la recherche d'une base d'un espace vectoriel et l'obtention de sa dimension, puis sur les projecteurs et les symétries (montrer qu'une application donnée est une projection ou une symétrie, déterminer ses éléments caractéristiques). S'il reste du temps, ils pourront aussi être plus théoriques sur le noyau et l'image d'une application linéaire... Les formules de Grassman et le théorème du rang n'ont pas encore été vues.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn