Semaine du 12/05

Chapitre 23 : Applications linéaires en exercices

Bien connaître la définition de l'image et du noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité.
Définition et caractérisation d'une projection, d'une symétrie.

Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Familles de vecteurs Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Si $(x_i)_{i\in I)}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors Im u =Vect $(u(x_i))_{i\in I}$. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts (voir méthode 16.4). Base, coordonnées. Bases canoniques de K^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $K_n[X]$, $K[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $K[X]$ et $K_n[X]$.
Existence de bases Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $[[1,n]]$, alors il existe une partie J de $[[1,n]]$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E. Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vec- teurs.
Dimension de $E\times F$, de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.
Rang d'une famille finie de vecteurs.
Sous-espaces et dimension Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.
Détermination d'une application linéaire Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i) = f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, sur- jectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Application linéaire de rang fini. Notation rg(u). Le rang de $v\circ u$ est majoré par min(rg(u),rg(v)). Inva- riance du rang par composition par un isomorphisme.
Théorème du rang Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et si G est un supplémentaire de Ker u dans E , alors u induit un isomorphisme de G sur Im u. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $n=$ dim (Ker u)+rg(u).

Démonstrations :

1. $\diamond\diamond$ Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i)=f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u (propr 13)
2. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. Toute famille libre a au plus n éléments.
Toute famille génératrice a au moins n éléments. Toute famille libre de n vecteurs est une base.
Toute famille génératrice de n vecteurs est une base (propr 14)
3. $\diamond$ Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension (propr 15)
4. $\diamond\diamond$ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m (n et m non nuls). L'espace vectoriel produit $E\times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim E\times F=\dim E+\dim F$ (paragraphe 2.7).
5. Formule de Grassman (th5)

6. Théorème du rang (th7)

Les élèves ⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux ⋄ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves ⋄⋄ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux ⋄ et sur l'un des exercices suivants (sous D4) :

— $\left(1, 1+X, X+X^2, ..., X^{n-1}+X^n, X^n+1\right)$ est liée dans $\mathbb{R}_n[X]$ (page 5)
— Dans $\mathbb{R}^4$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère les trois vecteurs :
  $u=(1,1,0,-1)$, $v=(1,0,0,-1)$ et $w=(1,0,-1,0)$.
  On pose $F=\text{Vect}(\{u,v,w\})$ et $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-z+2t=0\}$. Déterminer une base respectivement de F, de G, de $F\cap G$ (ex 5 td24).
— Soit $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ définie par $f((x,y,z))=(x',y',z')$ tel que $\left\{\begin{array}{c} x'=y+z \\ y'=x+y+z \\ z'=x \end{array}\right.$
  Donner les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et déterminer des bases de $\ker f$ et $\text{Im} f$ (sous th7)

Merci de proposer aux élèves ⊕ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite

— déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire en utilisant la propriété 2 (si $\mathcal{F}=(x_1,...,x_n)$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{F})=(f(x_1),...,f(x_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$) et le théorème du rang. En déduire si l'application est surjective, injective, bijective (modèle ex du cours sous th7).
— déterminer une base de F, G, $F+G$, $F\cap G$ (F et G étant deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E) en utilisant la formule de Grassmann (modèle exercice 5 td24)

S'il reste du temps, les exercices pourront aussi être plus théoriques sur le noyau et l'image d'une application linéaire ou sur symétries et projections.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj ⊕
Postel Esteban ⋄

G3 Boulard Louna (LV2) ⋄⋄
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo ⋄
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) ⊕

G8 Thiou Maxime ⋄
Gressier Corentin

Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn