1

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \mapsto (\sin x)^n$. f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc I_n existe

↳ en tant que produit de fonctions continues

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^1 dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin x)^{n+1} - (\sin x)^n\right) dx \quad \text{} \} \text{ linéarité de l'intégrale}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin x)^n}_{\geq 0} \underbrace{(\sin x - 1)}_{\leq 0} dx$$

or $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(\sin x)^n (\sin x - 1) \leq 0$

donc par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n (\sin x - 1) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0$$

Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Concl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} \leq I_n$ donc (I_n) est décroissante.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq (\sin x)^n \leq 1^n = 1$
donc par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = I_0$$
Ainsi
$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$$

(4) Soit $n \geq 2$. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\sin^n(x) = (\sin x)^{n-2} \sin^2 x$
$$= (\sin x)^{n-2}(1 - \cos^2 x)$$
$$= (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^{n-2}\cos^2 x$$

Ainsi par linéarité de l'intégrale,
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx$$
$$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx$$

Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx$ en intégrant par parties

Soient $u : x \mapsto \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}$ et $v : x \mapsto \cos x$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$

$u' : x \mapsto (\sin x)^{n-2}\cos x$ et $v : x \mapsto -\sin x$.

On a donc : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{(\sin x)^{n-2}\cos x} \cdot \cos x \, d$

$= \left[\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1} \sin x \, dx$

$= \quad 0 \quad + \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \frac{1}{n-1} I_n$

Ainsi $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$ d'où $I_{n-2} = I_n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$

$I_{n-2} = I_n \times \frac{n}{n-1}$

d'où $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

(5) Soit $\mathcal{P}(n)$: " $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ ". Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie en raisonnant par récurrence :

- si $n=1$ alors $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2\times 1)!}{2^{2\times 1}(1!)^2} = \frac{1}{2}$

  d'après la question (1) : $I_2 = \frac{\ }{\ }$ donc $I_2 = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

- supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \geq 1$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{2n+2-1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)^2\, 2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ vraie

(6) Soit $Q(n)$: " $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}$ ". Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$ est vraie en raisonnant par récurrence :

- si $n=1$, $I_{2n+1} = I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$ et $\frac{2^{2\times 1}(1!)^2}{(2\times 1)!(3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

  donc $Q(1)$ est vraie.

- hérédité : supposons que $Q(n)$ est vraie pour $n \geq 1$ et montrons qu'alors $Q(n+1)$ est vraie.

$I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = \frac{2n+3-1}{2n+3} I_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\, \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n+2)^2\, 2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)} \times \frac{1}{2n+3}$

donc $I_{2n+3} = \dfrac{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!\,(2n+3}$ donc $Q(n+1)$ vraie

- Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie

(7) D'après (2) (I_n) est décroissante donc $\forall n \geqslant 1$, $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$

(8) Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $I_n = 0$.
Alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = 0$ | or $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n(x) \geqslant 0$
et $x \mapsto \sin^n(x)$ est continue sur $[0. \frac{\pi}{2}]$ donc
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n(x) = 0$ donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) = 0$
ce qui est absurde !
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{2n} \neq 0$
et d'après (7) :

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n}}$$

ainsi comme d'après (4) $I_{2n+2} = \dfrac{2n+2-1}{2n+2} I_{2n+2-2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$

on obtient : $\dfrac{2n+1}{2n+2} \leq \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1$

on obtient par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$

(9) Soit $n \geqslant 1$, $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)} \times \dfrac{2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n)! \times \pi}$

$$= \frac{(2^{2n})^2 (n!)^4 \times 2}{((2n)!)^2 (2n+1) \times \pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \text{ d'après q 8.}$$

Donc par composée des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}}$ existe et vaut 1

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2 \times \sqrt{2}}{(2n)!\,\sqrt{2n+1}\,\sqrt{\pi}} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

(10) Soit $n \geqslant 1$ On fait le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - x$
$x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est C^1 sur $[0. \frac{\pi}{2}]$
$du = -dx$
lorsque x vaut 0, u vaut $+\frac{\pi}{2}$
lorsque x vaut $\frac{\pi}{2}$, u vaut 0

Donc $I_n = \int_{+\frac{\pi}{2}}^0 -(\sin^n)(\frac{\pi}{2} - u)\,du$

$I_n = -\int_{+\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\frac{\pi}{2} - u)\,du$, échange des bornes
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\,du$

Ainsi $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n\,du$.

Pb 2 I ① $z' + z\,th(t) = 0$.

$t \mapsto th(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$
$t \mapsto \ln(ch(t))$ est l'une d'entre elles
D'après le cours, l'ensemble S_0 des solutions est :
$S_0 = \{t \mapsto Ke^{-\ln(ch(t))}, K \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto Ke^{\ln\left(\frac{1}{ch t}\right)}, K \in \mathbb{R}\}$
$z_1 \in S_0$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $z_1(t) = \frac{K}{ch t}$
or $z_1(0) = 1$ donc $\frac{K}{ch(0)} = 1$ donc $K = ch(0) = 1$

Donc $z_1 : t \mapsto \frac{1}{ch t}$.

I ② $z' + z\,th(t) = t \times th(t)$ (E)
Appliquons la méthode de variation de la constante, càd
on cherche z_p sous la forme : $z_p : t \mapsto \frac{K(t)}{ch t}$ où K est dér sur $\mathbb{R}$

z_p sol de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $z_p'(t) + z_p(t)th(t) = t \times th(t)$
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{K'(t)ch t - K(t)sh t}{ch^2 t} + \frac{K(t)\,th(t)}{ch t} = t\,th(t)$
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{K'(t)}{ch(t)} = t\,th(t)$
ssi $\forall t \in \mathbb{R}$ $K'(t) = t\,sh(t)$.

on propose par exemple $\forall t \in \mathbb{R}$ $K(t) = t\,ch(t) - sh(t)$
(obtenu en intégrant par parties : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$\int_0^t x\,sh(x)\,dx = [x\,ch(x)]_0^t - \int_0^t ch(x)\,dx = t\,ch(t) - 0\,ch(0) - [sh\,x]_0^t$
$= t\,ch t - sh t + sh(0)$.
où $u : x \mapsto x$ $v' : x \mapsto sh(x)$ u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
$u' : x \mapsto 1$ $v = x \mapsto ch(x)$)

Ainsi $z_p : t \mapsto \frac{t\,ch(t) - sh(t)}{ch(t)}$ est une sol part de (E)
D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est :

$\left\{t \mapsto \frac{K}{ch t} + t - th t, K \in \mathbb{R}\right\} = S$
$z_2 \in S$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tq $z_2(t) = \frac{K}{ch t} + t - th t$
et $z_2(0) = 0$ donc $\frac{K}{ch(0)} + 0 - th(0) = 0$ donc $K = 0$
et $z_2 : t \mapsto t - th t$

II. Etude d'intégrales et de suites

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est continue sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. Donc $I_k(x)$ existe.

1 . Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = e^t$ et donc $t = \ln u$ puis $dt = \dfrac{du}{u}$, on obtient puisque $t \mapsto e^t$ C^1 strict^t crois sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,x]$

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch} t}\, dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2}\, du = 2(\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_1(x) = 2\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.}$$

2 - Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$I_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\, dt = [\operatorname{th} t]_0^x = \operatorname{th} x.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_2(x) = \operatorname{th} x.}$$

3. a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{sh} t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}\, dt = \int_0^x \operatorname{ch} t.\frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\, dt = \left[\operatorname{sh} t.\frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t}\right]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh} t \frac{-(k+1)\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\, dt \\
&= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)\int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\, dt = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)\int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\, dt \\
&= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)\left(\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+2} t}\, dt\right) \\
&= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + (k+1)(I_k - I_{k+2}).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(k+1)I_{k+2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + kI_k.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_{k+2} = \frac{k}{k+1} I_k + \frac{1}{k+1}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}.}$$

b)

$$I_3 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{2}(2\operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{Arctan}(e^x) + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4},$$

et

$$I_4 = \frac{2}{3}I_2 + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{2}{3}\operatorname{th} x + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I_3(x) = \operatorname{Arctan}(e^x) + \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\pi}{4} \text{ et } I_4(x) = \frac{2}{3}\operatorname{th} x + \frac{\operatorname{sh} x}{3\operatorname{ch}^3 x}.}$$

4. a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient puisque $t \mapsto -t$ est C^1 et strict décroissante sur $\mathbb{R}$

$$I_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}\,dt = \int_0^{x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k(-u)}\,(-du) = -\int_0^{x} \frac{1}{\operatorname{ch}^k u}\,du = -I_k(x).$$

Donc,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_k \text{ est impaire.}}$$

b) I_k est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ qui s'annule en 0

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier est continue sur $\mathbb{R}$, en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^∞ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, on a

$$I_k'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^k x}, \text{ puis } I_k''(x) = -\frac{k\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x},$$

et enfin

$$I_k'''(x) = -k\left(\operatorname{ch} x\frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} x} + \operatorname{sh} x\frac{-(k+1)\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+2} x}\right) = -k\frac{\operatorname{ch}^2 x - (k+1)\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^{k+2} x}.$$

Rq : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet un développement limité d'ordre 3 en 0 fourni par la formule de TAYLOR-YOUNG.

$$\begin{aligned} I_k(x) &\underset{x\to 0}{=} I_k(0) + I_k'(0)x + \frac{I_k''(0)}{2}x^2 + \frac{I_k'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 0 + 1.x + 0.x^2 + \frac{-k}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\boxed{I_k(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{k}{6}x^3 + o(x^3).}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $I_k'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k x} > 0$. Donc la fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en particulier, pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} = I_k(n+1) > I_k(n) = u_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

b) Soit t un réel positif. Puisque $e^{-t} > 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{e^{-t}+e^{t}} \leq \dfrac{2}{e^{t}} = 2e^{-t}$.
Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on a

$$I_k(n) = \int_0^n \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)^k dt \leq \int_0^n (2e^{-t})^k \, dt = 2^k \int_0^n e^{-kt} \, dt = \frac{2^k}{k}(1-e^{-nk}) \leq \frac{2^k}{k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ I_k(n) \leq \frac{2^k}{k}.}$$

La suite (u_n) est ainsi croissante et majorée (par $\dfrac{2^k}{k}$). On en déduit que la suite (u_n) converge.

8. **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel positif x on a alors

$$I_k(x) \leq I_k(E(x)+1) \leq \frac{2^k}{k}.$$

Ainsi, la fonction I_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée (par $\dfrac{2^k}{k}$). La fonction I_k a donc une limite réelle en $+\infty$ ou encore J_k existe dans $\mathbb{R}$.

b) $J_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} I_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2\operatorname{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} I_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th} x) = 1$.

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } J_2 = 1.}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$J_{k+2} = \lim_{x\to+\infty} I_{k+2}(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k}{k+1}I_k(x) + \frac{1}{k+1}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x}.\right) = \frac{k}{k+1}J_k,$$

(car $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1} x} \sim \dfrac{e^x/2}{(e^x/2)^{k+1}} = \dfrac{1}{2^k}e^{-kx} \to 0$).

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_{k+2} = \frac{k}{k+1}J_k.}$$

Détaillons davantage cette récurrence. Pour les entiers impairs, elle s'écrit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p}J_{2p-1}.$$

Donc pour tout entier naturel non nul p, on a

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\frac{2p-5}{2p-4}\cdots\frac{1}{2}J_1 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 2.1}{((2p)(2p-2)\ldots.(2.2).(2.1))^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

résultat à montrer par récurrence (voir page suivante)

De même, pour les entiers pairs, la récurrence s'écrit

$$\forall p \geq 2,\ J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1}J_{2p-2}.$$

Donc pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a

$$J_{2p} = \frac{2p-2}{2p-1}\frac{2p-4}{2p-3}\cdots\frac{2}{3}J_2 = \frac{((2p-2)(2p-4)\ldots 4.2)^2}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 3.2}.1 = \frac{(2^{p-1}(p-1)!)^2}{(2p-1)!},$$

ce qui reste vrai quand $p = 1$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p} = \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}.}$$

(idem)

(soit $\lim\limits_{+\infty} I_{k+2} = \frac{k}{k+1} \lim\limits_{+\infty} I_k$ ou encore $\boxed{J_{k+2} = \frac{k}{k+1} J_k}$)

$J_3 = \frac{1}{2} J_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$; $J_4 = \frac{2}{3} J_2 = \frac{2}{3}$; $J_5 = \frac{3}{4} J_3 = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$; $J_6 = \frac{4}{5} J_4 = \frac{4 \times}{5 \times}$

- <u>Cas où k est pair</u> ($k = 2p$).

Soit $\mathcal{P}(p)$: " $\boxed{J_{2p} = \frac{(2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p-1) \times \cdots \times 3}}$ ". Montrons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \geq 2$ par récurrence.

- Initialisation : si $p = 2$ alors $J_{2p} = J_4 = \frac{2}{3}$.
- hérédité : supposons qu'il existe $p \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(p+1)$ vraie.

$$J_{2p+2} = \frac{2p}{2p+1} J_{2p} = \frac{2p(2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1)(2p-1) \times \cdots \times 3} = \frac{(2(p+1)-2) \times \cdots \times 2}{(2(p+1)-1) \times \cdots \times 3}$$

d'où $\mathcal{P}(p+1)$ vraie.

- Concl : $\forall p \geq 2$, $\mathcal{P}(p)$ vraie.

- <u>Cas où k est impair</u> ($k = 2p+1$).

Soit $Q(p)$: " $\boxed{J_{2p+1} = \frac{(2p-1) \times \cdots \times 1}{2p \times \cdots \times 2} \frac{\pi}{2}}$ ". Montrons que $Q(p)$ est vraie pour tout $p \geq 1$ par récurrence.

- Initialisation : si $p = 1$ alors $J_3 = J_{2p+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$
- hérédité : supposons qu'il existe $p \geq 1$ tel que $Q(p)$ vraie et montrons que $Q(p+1)$ vraie.

$$J_{2p+3} = \frac{2p+1}{2p+2} J_{2p+1} = \frac{(2p+1)(2p-1) \times \cdots \times 1}{(2p+2) \times 2p \times \cdots \times 2} \frac{\pi}{2} \quad \frac{(2(p+1)-1) \times \cdots \times 1}{2(p+1) \times \cdots \times 2} \frac{\pi}{2}$$

d'où $Q(p+1)$ vraie.

- Concl : $\forall p \geq 2$ $Q(p)$ vraie.

Soit $p \geq 2$. $J_{2p} = \frac{(2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p-1) \times \cdots \times 3} = \frac{(2p-2) \times \cdots \times 2}{\frac{(2p-1)!}{(2p-2) \times \cdots \times 2}} = \frac{((2p-2) \times \cdots \times 2)^2}{(2p-1)!}$

$$= \frac{(2(p-1) \times 2(p-2) \times \cdots \times 2 \times 1)^2}{(2p-1)!} = \boxed{\frac{(2^{p-1})^2 ((p-1)!)^2}{(2p-1)!}}$$

avec $(2^{p-1})^2 = 2^{2p-2}$. Résultat encore vrai pour $p =$

Soit $p \geq 1$. $J_{2p+1} = \frac{(2p-1) \times \cdots \times 1}{2p \times \cdots \times 2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2p \times \cdots \times 2)^2} \frac{\pi}{2}$ $\frac{(2p)!}{(2 \times p \times 2 \times (p-1) \times \cdots} \times \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}}$$

Résultat encore vrai pour $p = 0$